Title: Synthetische Theorie der Cliffordschen Parallelen und der Linearen Linienörter des Elliptischen Raumes

Author: Wolfgang Vogt

Release Date: April 8, 2010 [EBook #31911]

Language: German

Character set encoding: ISO-8859-1

SYNTHETISCHE THEORIE DER CLIFFORDSCHEN PARALLELEN UND DER LINEAREN LINIENÖRTER DES ELLIPTISCHEN RAUMES

VON

DR. PHIL. WOLFGANG VOGT

PRIVATDOZENT AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZU KARLSRUHE I. B.

LEIPZIG UND BERLIN

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1909

Anmerkung des Transcribers

Einige wenige kleinere Setzfehler und Unstimmigkeiten wurden bereinigt. Die Korrekturen finden sich im LaTeX-Quellcode als: `\DPnote{Änderungsbeschreibung}`

Vorwort.

Die Parallelen des Lobatschefskijschen Raumes, welche mit denen des Euklidischen die Eigenschaft des unendlich fernen Schnittpunktes — und nur diese — gemein haben, schienen die einzig mögliche Erweiterung des Parallelenbegriffes, bis am Anfang der 70er Jahre Clifford[1]) in der elliptischen Geometrie Geraden entdeckte, welche alle elementaren Eigenschaften der Euklidischen Parallelen besitzen — nur sind sie windschief. Die Idee dieser Cliffordschen Parallelen wurde weiteren Kreisen erst bekannt durch Veröffentlichungen von Ball[2]) und Klein.[3])

Ball gewinnt die Cliffordschen Parallelen durch seine in der Theory of the Content entwickelte Vektorentheorie. Klein stellt die allgemeine Bewegung des elliptischen Raumes als Produkt zweier Substitutionen vom „Quaternionen-Typus" dar und gelangt zu der Cayleyschen Formel[4])

$$\begin{gathered}(x_4' + ix_1' + jx_2' + kx_3') \\ = (a_4 + ia_1 + ja_2 + ka_3)(x_4 + ix_1 + jx_2 + kx_3)(a_4' + ia_1' + ja_2' + ka_3').\end{gathered}$$

Jeder der beiden Faktoren ist eine Schiebung längs der Parallelen eines Netzes; aus der Existenz solcher Schiebungen folgen die Eigenschaften der Parallelen. Study[5]) hat durch neue analytische und geometrische Ideen

1) W. K. Clifford, Preliminary Sketch of Biquaternions, Math. Pap., p. 181. — Proc. of Lond. Math. Soc., t. IV., p. 380.

2) R. S. Ball, On the theory of the Content, Transactions of the R. Irish Academy, vol. XXIX, 1889, p. 123.

3) F. Klein, Zur nichteuklidischen Geometrie, Math. Ann., Bd. 37, 1890, p. 546. — Nichteuklidische Geometrie, autograph. Vorlesung, Göttingen 1893, Bd. II., p. 224.

4) Cayley, Crelles Journal, Bd. 50, 1845. Werke Bd. 2, p. 214.

5) E. Study, Über Nicht-Euklidische und Linien-Geometrie, Jahresber. d. d. Math. Ver., Bd. 11, p. 313; Bd. 15, p. 476. — Beiträge zur Nicht-Euklidischen Geometrie, Am. Journ. of Math., vol. XXIX, 1907, p. 101.

die Theorie der Cliffordschen Parallelen vertieft und fortgeführt; zugrunde liegt bei ihm wie bei Coolidge[1]) das fruchtbare Übertragungsprinzip: Das Speerkontinuum läßt sich eindeutig und stetig abbilden auf die Punktepaare zweier Kugeln; dabei ist die Gruppe der Bewegungen des elliptischen Raumes holoedrisch isomorph zu der Gruppe der simultan auszuführenden Drehungen der beiden Kugeln.

Italiener[2]) haben das Gebiet differentialgeometrisch untersucht.

Dagegen fehlt eine rein geometrische Behandlung[3]) der Cliffordschen Parallelen, obgleich eine solche sehr gut möglich und dem Problem der windschiefen Geraden mit den elementaren Eigenschaften der Euklidischen Parallelen angemessen ist.

Die vorliegende Arbeit führt eine synthetische Theorie der Cliffordschen Parallelen durch und untersucht ihre Bedeutung für die linearen Linienörter des elliptischen Raumes.

Die Grundeigenschaften der elliptischen Geometrie werden vorausgesetzt[4]), sind aber in den beiden Nummern der Einleitung zusammengestellt.

Die Untersuchung vermeidet die Benutzung von imaginären Elementen z. B. der absoluten Fläche; dieses Prinzip verursacht zwar manchen Orts erhebliche Schwierigkeiten, dürfte aber doch zum Wesen einer rein geometrischen Arbeit gehören.

Den Ausgangspunkt bildet die Bemerkung, daß eine befriedigende Begründung des Begriffes der *Windung zweier Geraden* fehlt. Study[5]) hat diese Lücke mit Hilfe seines analytischen Apparates ausgefüllt. Wir können die Windung zweier Geraden direkt auf die primitiven Begriffe von Rich-

1) J. Coolidge, Die dualprojektive Geometrie im elliptischen und sphärischen Raume, Dissertation, Greifswald 1904; vgl. auch zwei Arbeiten in Atti di Torino 1903 und 1905. — Study und Coolidge verwenden für Cliffordsche Parallelen die Bezeichnung „parataktische Geraden“.

2) Bianchi, Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica, Ann. di Mat., Ser. II, Bd. 24, p. 107. — Fubini, Il parallelismo di Clifford negli spazi ellittici, Annali della R. Scuola Normale di Pisa, vol. 9, 1900.

3) Ansätze in: Bonola, Die nichteuklidische Geometrie, deutsch von H. Liebmann, Leipzig 1908, Anhang I, p. 195.

4) Vgl. außer den genannten Schriften auch Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Leipzig 1891, II_1, Abteil. III. — H. Liebmann, Nicht-Euklidische Geometrie, Leipzig 1905, Kap. VII. — F. Schur, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1909.

5) Study, Die Begriffe links und rechts in der elliptischen Geometrie, Am. Journ. of Math., vol. XXIX, p. 116.

tung und Drehsinn zurückführen durch eine elementare Überlegung, deren Verwendung auch für die Euklidische Geometrie nützlich sein dürfte.

Durch das Vorzeichen des Parameters der beiden Geraden, d. i. des Produktes der Tangenten ihrer beiden extremen Abstände geben wir der Windung Ausdruck.

Als *Cliffordsche Parallelen* werden Geraden definiert, die mehr als zwei gemeinsame Lote haben. Die Netze von Parallelen beider Windungen leiten wir her aus der v. Staudt-Lürothschen Theorie der Strahlennetze mit imaginären Leitgeraden. Zugleich ergibt sich ihr projektiver Zusammenhang mit dem absoluten Polarraum und untereinander.

Eine *elementare Behandlung* der Parallelen weist die ganze Summe der Euklidischen Parallelensätze an den windschiefen Geraden nach, überdies eine Reihe von Sätzen, die teils auf Hjelmslev, Study, Coolidge, Bonola-Liebmann zurückgehen, teils neu sein dürften; die vorausgeschickte Windungstheorie gestattet durch die Unterscheidung entsprechender Richtungen von parallelen Geraden eine exakte Formulierung. Ich erwähne nur die Existenz von *windschiefen Parallelogrammen zweierlei Typus'*: in denen erster Art sind die gegenüberliegenden Seiten in ungleicher, in denen zweiter Art in gleicher Windung parallel.

Die wichtigsten Sätze der *elliptischen Kinematik* entspringen leicht der geschaffenen Grundlage, vor allen die beiden Gruppen von *Parallelverschiebungen*. Sie gipfeln in dem Satze: Jede Bewegung ist aus zwei eindeutig bestimmten vertauschbaren Parallelverschiebungen ungleicher Windung zusammensetzbar. [1])

Der zweite Abschnitt wendet sich zu den linearen Strahlenörtern. Ihre projektivischen Eigenschaften werden als bekannt vorausgesetzt, metrische Beziehungen werden abgeleitet und vor allem das Auftreten der Parallelen in ihnen untersucht.

Der *Asymptotenkegel* einer *gescharten Fläche zweiter Ordnung* der Euklidischen Geometrie, dessen Strahlen zu den Strahlen beider Regelscharen parallel sind, spaltet sich in der elliptischen Geometrie in zwei. Durch einen Mittelpunkt der Fläche gehen zwei Kegel (p) und (p_0); die Strahlen von (p) sind rechtsparallel zu denen der g-Schar, linksparallel zu denen der l-Schar, die Strahlen von (p_0) sind umgekehrt linksparallel zu denen der g-Schar, rechtsparallel zu denen der l-Schar. Beide sind koaxial mit der Fläche.

Zwei koaxiale Kegel müssen durch ihre Öffnungswinkel eine Bedingung

1) F. Klein, Math. Ann. 37, p. 548.

befriedigen, um die Parallelkegel einer gescharten Fläche zweiter Ordnung zu sein. Diese Bedingung läßt den Kegeln aber Raum auszuarten. Aus der besonderen Gestalt, welche die Parallelkegel annehmen können, wird auf die Existenz von folgenden Typen der gescharten Fläche zweiter Ordnung geschlossen: 1) *Die Cliffordsche Fläche*, deren eine Schar aus Geraden besteht, die sämtlich zueinander rechts-, die andere aus Geraden, die sämtlich zueinander linksparallel sind. Sie entspricht durch die Eigenschaft, daß ihre Strahlen zu zwei Achsen sämtlich rechts- bzw. linksparallel sind, dem *Euklidischen Zylinder*. 2) Die eine Schar trägt eine Involution von Strahlenpaaren rechtsparalleler Geraden, die andere eine solche linksparalleler Geraden. Die Strahlen der Fläche sind zu den Strahlen eines Strahlenbüschels rechts- bzw. linksparallel; sie tritt damit an die Stelle des *hyperbolischen Paraboloids* der Euklidischen Geometrie. 3) Jede Schar trägt zugleich eine Involution rechtsparalleler Geraden und eine solche linksparalleler Geraden; sie enthält ein absolutes Polarvierseit und entspricht dem *gleichseitig hyperbolischen Paraboloid* der Euklidischen Geometrie.

Vom *linearen Komplex* sind einige Eigenschaften bekannt. Die Achsen und der Parameter finden sich bei D'Ovidio, der Parallelkomplex bei Study und Coolidge. Wir geben eine zusammenhängende Theorie, unterscheiden rechts- und linksgewundene Komplexe, weisen die Existenz von *Durchmesser-Parallelnetzen* nach, welche die Eigenschaften des Euklidischen Durchmesser-Parallelbündels besitzen, und untersuchen das Auftreten der Parallelen im linearen Komplex und dem zugehörigen Nullraum. Von besonderem Interesse ist der *Parallelkomplex*, der sich aus ∞^1 gleichgewundenen Parallelennetzen zusammensetzt. Er besitzt ein ganzes Netz von Achsen und gestattet im Gegensatz zu dem gewöhnlichen Komplex, der ∞^2 Bewegungen in sich zuläßt, ∞^4 Bewegungen in sich.

Die *lineare Kongruenz* oder das *Strahlennetz* enthält immer zwei absolutpolare Geraden, die *Hauptstrahlen* des Netzes. Ist das Netz elliptisch, so haben alle seine Strahlen gegen diese Strahlen dieselbe Windung. Das Strahlennetz besitzt ein Symmetrietetraeder in dem Sinne, daß es durch Umwendungen um seine Kanten in sich selbst übergeht.

Die Frage nach dem Ort der Achsen derjenigen linearen Komplexe, welche das Netz enthalten, führt auf eine Regelfläche vierter Ordnung mit zwei doppelten Leitgeraden. Die gestaltliche Untersuchung dieser projektiven Verallgemeinerung des viel behandelten Euklidischen *Zylindroids* wird von Interesse sein; sie ist zugleich die Fundamentalfläche in der dualprojektiven

Geometrie. [1])

Der in der Euklidischen Geometrie von Jolles begründeten *Fokaltheorie* des Strahlennetzes kommt in der Ableitung wie in der Gestaltung die volle Dualität des elliptischen Raumes sehr zustatten.

Die Frage nach den im Netz enthaltenen Parallelenpaaren führt zu zwei linearen Verwandtschaften innerhalb des Netzes; sie werden durch die Polarität in bezug auf zwei Flächen zweiter Ordnung hervorgerufen, von denen je eine Schar dem Netz angehört; wir bezeichnen sie als *Kernscharen* und untersuchen ihre Realität im elliptischen und hyperbolischen Netz.

Alle diese Verhältnisse nehmen besonders interessante Gestalt an in den Netzen, welche stufenweis eine ein-, zwei-, viergliedrige Gruppe von Bewegungen in sich zulassen. Diese Netze enthalten in derselben Reihenfolge ∞^1 Cliffordsche Scharen einer Windung — ihre Leitgeraden sind, wenn reell, in der anderen Windung parallel —, ∞^1 Cliffordsche Scharen beider Windungen — die Leitgeraden sind stets reell und absolutpolar —, ∞^2 Cliffordsche Scharen einer Windung — der Fall des Parallelennetzes selbst.

Die viergliedrige Gruppe von Bewegungen, welche das Parallelennetz in Ruhe lassen, reduziert sich für die Geometrie dieses Netzes auf eine dreigliedrige, und zwar ist diese Gruppe ähnlich mit der Gruppe der Bewegungen auf der Kugel. Darum herrscht im Parallelennetz die Geometrie der Kugel, ein Satz, der in der bekannten Studyschen Abbildung der Geraden des elliptischen Raumes auf die Punktepaare zweier Kugeln enthalten ist.

Ich kann die Arbeit nicht veröffentlichen, ohne Herrn Geheimen Hofrat Professor Dr. F. Schur, dessen Assistent ich während der letzten anderthalb Jahre seiner Tätigkeit an der hiesigen Hochschule sein durfte, für mannigfachen Rat und Anregung verbindlichst zu danken.

Karlsruhe i. B., März 1909.

1) Coolidge, a. a. O., p. 23.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

1. Der absolute Polarraum. Der elliptischen Geometrie liegt der reelle Polarraum einer imaginären Fläche zweiter Ordnung zugrunde, den wir *absoluten Polarraum* nennen wollen. Ich begnüge mich mit dem Hinweis auf die Möglichkeit seiner synthetischen Konstruktion aus einer hinreichenden Anzahl linearer Bedingungen [1]) und stelle im folgenden die Grundeigenschaften zusammen: Jedem Punkt A entspricht eine Ebene α'; Punkt und Ebene in dieser Beziehung nennen wir *absoluten Pol* und *absolute Polarebene.* Durchläuft Punkt A eine Ebene α, so dreht sich seine absolute Polarebene α' um den Pol A' von α, und umgekehrt. Der Punktreihe, dem Ebenenbüschel von einer Geraden a entsprechen projektiv das Ebenenbüschel, die Punktreihe einer anderen Geraden a'; so ist jeder Geraden a eine andere a' zugeordnet; nennen wir zwei solche *Geraden absolutpolar.* [2])

Zwei Elemente, von denen jedes mit dem absolut polaren des anderen inzident ist, heißen *absolutkonjugiert*; so sind z. B. zwei Punkte absolutkonjugiert, wenn jeder in der absoluten Polarebene des anderen liegt, zwei Geraden, wenn jede die absolute Polare der anderen schneidet. Übrigens ist, wenn das erste Element mit dem polaren des zweiten inzident ist, schon von selbst auch das zweite mit dem polaren des ersten inzident.

Auf jeder Geraden liegt eine elliptische Involution konjugierter Punkte, deren Doppelelemente die konjugiert imaginären Schnittpunkte mit der imaginären Kernfläche sind. Da eine elliptische Involution kein Paar konjugiert imaginärer Elemente besitzt, so folgt: Kein Paar absolutkonjugierter Punkte kann konjugiert imaginär sein. Da weiter zwei windschiefe konjugiert imaginäre Geraden von jeder reellen Treffgeraden in konjugiert imaginären Punkten geschnitten werden, jeder Punkt einer Geraden aber mit

---

1) Reye, Geometrie der Lage. Bd. II. 4. Auflage 1907, p. 102 ff.

2) Study faßt zwei absolutpolare Geraden zu dem Begriffe des Linienkreuzes zusammen.

jedem Punkt ihrer absoluten Polaren absolutkonjugiert ist, so schließen wir: *Es gibt kein Paar absolutpolarer Geraden, die konjugiert imaginär sind.*

Die Gerade des elliptischen Raumes ist endlich und geschlossen. Wir erhalten eine vollkommene Dualität, wenn wir der ganzen Geraden, wie dem gestreckten Winkel die Länge π geben. Zwei Punkte AB teilen die Gerade in zwei Teile, die sich zu π ergänzen. *Unter Strecke AB sei stets derjenige Teil verstanden, der kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist.* Diese Festsetzung läßt einer Unbestimmtheit nur Raum, wenn die beiden Punkte die Gerade halbieren, also den Abstand $\frac{\pi}{2}$ haben. Dieselbe Übereinkunft gelte auch für den Winkel zweier Geraden oder Ebenen. Es ist klar, daß ich den Winkel zweier Ebenen messen kann durch die auf der absoluten Polaren ihrer Schnittgeraden eingeschnittene Strecke.

Zwei Punkte haben den Abstand $\frac{\pi}{2}$, zwei Geraden, Ebenen sind zueinander senkrecht, wenn die beiden Elemente absolutkonjugiert sind. Der Ort der Geraden und Ebenen also, die auf einer Ebene α senkrecht stehen, ist das Strahlen- bzw. Ebenenbündel um ihren absoluten Pol A'. Der Ort der Ebenen, die eine Gerade a senkrecht schneiden, ist das Ebenenbüschel um ihre absolute Polare a'; der Ort der Geraden, die a senkrecht schneiden oder kreuzen, ist der Inbegriff der Treffgeraden von a'. Der Ort der Punkte schließlich, welche von einem Punkte A, von einer Geraden a, von einer Ebene α den Abstand $\frac{\pi}{2}$ haben, ist beziehungsweise die absolute Polarebene α', die absolutpolare Gerade a', der absolute Pol A'.

Dasjenige Paar absolutkonjugierter Punkte auf einer Geraden, welches zwei Punkte A, B harmonisch trennt, halbiert die Strecke AB und die Ergänzungsstrecke.

2. Bewegung und Spiegelung. Die Bewegungen des elliptischen Raumes werden dargestellt durch die sechsgliedrige kontinuierliche Gruppe von Kollineationen, welche der absolute Polarraum in sich zuläßt. Von den Bewegungen streng zu unterscheiden sind die Spiegelungen an einer Ebene oder, was dasselbe ist, an einem Punkte; sie können durch keine kontinuierliche Bewegung ersetzt werden. Eine Spiegelung ist eine involutorische Homologie mit der Spiegelebene als Ebene der Homologie, mit ihrem absoluten Pol als Zentrum der Homologie.

Die Richtung in einer Punktreihe, den Drehsinn in einem Ebenenbüschel kann man bekanntlich durch die Aufeinanderfolge von drei Elementen festlegen; nach unserer Übereinkunft, unter AB, $\alpha\beta$, immer den Teil der ganzen Geraden, des ganzen Winkels zu verstehen, der kleiner ist als $\frac{\pi}{2}$, genügen schon zwei Elemente in fester Reihenfolge; AB legt die Richtung fest, in der die Strecke AB, die kleiner ist als $\frac{\pi}{2}$, von A nach B durchlaufen wird. Eine Gerade a als Träger einer Punktreihe will ich durch eckige Klammern $[a]$, als Träger eines Ebenenbüschels durch runde Klammern bezeichnen (a). Die beiden Richtungen und Drehsinne unterscheide ich durch ein angehängtes Vorzeichen: $[a]_+$, $[a]_-$, $(a)_+$, $(a)_-$.

Unter einem Dreibein will ich ein dreirechtwinkliges Achsenkreuz, auf dessen Achsen positive Richtungen festgelegt sind, verstehen. In einem Punkt O gibt es dann zwei Systeme von Dreibeinen. Je zwei Dreibeine eines und desselben Systems können durch Bewegung zur Deckung gebracht werden; zwei Dreibeine verschiedener Systeme gehen nur durch Spiegelung ineinander über. Sind z. B. $[x]_+$, $[y]_+$, $[z]_+$ die gerichteten Achsen eines Dreibeins, so erhalte ich durch Spiegelung an der xy-Ebene ein Dreibein, dessen Geraden zwar mit dem alten übereinstimmen, dessen Richtungen aber mit Hilfe des alten ausgedrückt sind durch $[x]_+$, $[y]_+$, $[z]_-$. *Die Dreibeine des einen Systems nenne ich positiv, diejenigen des anderen negativ.*

Liegt ein Dreibein vor, so gibt es eine Drehung um den Winkel 90° mit z als Drehachse, welche die positive Richtung $[x]_+$ in $[y]_+$ überführt. Liegt eine gerichtete Gerade $[z]_+$ vor, so will ich als positiven Drehsinn um (z) immer denjenigen nehmen, der folgenderweise bestimmt wird: Ich konstruiere ein *positives* Dreibein, das die gegebene positive Richtung als positive z-Richtung hat, und bestimme den Drehsinn, der durch Beschreibung eines Drehwinkels von 90° um z als Achse die positive x- in die positive y-Richtung bringt. So ist stets durch eine gegebene positive Richtung auf einer Geraden eindeutig ein positiver Drehsinn um dieselbe Gerade festgelegt, und umgekehrt. Ein negatives Dreibein würde den anderen Drehsinn ergeben.

Eine Richtung und einen Drehsinn an ein und derselben Geraden fasse ich zusammen zu dem Begriff der Windung. Eine Windung an einer Geraden heißt *positive oder rechte Windung*, wenn ihre Richtung und ihr Drehsinn in der eben besprochenen Weise durch ein positives Dreibein in Zusammenhang stehen; sie heißt *negative oder linke Windung*, wenn Richtung und Drehsinn durch ein negatives Dreibein zusammenhängen.

Bei Bewegung bleibt die Windung erhalten, bei Spiegelung geht sie in die entgegengesetzte über.

Erster Abschnitt

Synthetische Theorie der Cliffordschen Parallelen.

§ 1. Die Windung zweier Geraden.

3. Die gemeinsamen Lote und das Moment. a und b seien zwei windschiefe Geraden, a' und b' ihre absoluten Polaren. a und a' tragen je eine Involution aufeinander senkrechter d. i. absolutkonjugierter Ebenen. Die beiden Involutionen sind elliptisch und schneiden in b zwei elliptische Punktinvolutionen ein. Diese haben ein stets reelles Punktepaar B, B_1 gemein. B werde von α und α', B_1 von α_1 und α_1' eingeschnitten; dann sind α und α_1, α' und α_1' absolutkonjugiert und folglich die Schnittgeraden $\alpha\alpha' = h$, $\alpha_1\alpha_1' = h_1$ absolutpolar. h und h_1 treffen a in A und A_1. Da nun zwei Geraden aufeinander senkrecht stehen, wenn eine die absolute Polare der andern schneidet, so sind h und h_1 gemeinsame Lote von a und b; und zwar die einzigen, wofern die beiden Punktinvolutionen auf b nicht identisch sind, ein Fall, der auf unendlich viele gemeinsame Lote schließen ließe. *Zwei windschiefe Geraden haben also im allgemeinen zwei gemeinsame Lote; dieselben sind stets reell und zueinander absolutpolar.*

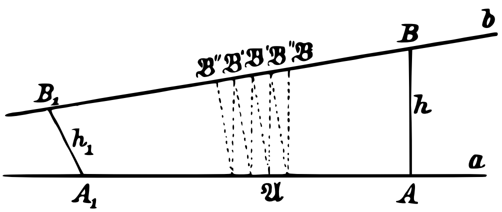

Fig. 1.

Fälle ich von einem Punkte $\mathfrak{B}$ der Geraden b das Lot $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ auf a, von $\mathfrak{A}$ wieder das Lot $\mathfrak{A}\mathfrak{B}'$ auf b, so beschreibt $\mathfrak{B}'$ eine zu $\mathfrak{B}$ projektive Punktreihe, wenn $\mathfrak{B}$ die Gerade b durchläuft. Doppelelemente der Projektivität sind B und B_1. Bilden $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$ ... eine Iterationsfolge dieser Projektivität d. h. entspricht dem Punkte $\mathfrak{B}$ der $\mathfrak{B}'$, in demselben Sinne dem $\mathfrak{B}'$ der $\mathfrak{B}''$, dem $\mathfrak{B}''$ der $\mathfrak{B}'''$ usf., so sind zunächst zwei Fälle möglich [1]): entweder schließt sich die Punktfolge, und zwar müß-

1) Steiner-Schröder-Sturm, Theorie der Kegelschnitte. Leipzig 1898, p. 506,

te wegen der Realität der Doppelelemente bereits $\mathfrak{B}'' \equiv \mathfrak{B}$ sein, oder die Folge konvergiert nach einem Doppelelement. Die erste Möglichkeit fällt weg; denn bei der Konstruktion der Punktfolge entstehen rechtwinklige Dreiecke, in welchen immer die Kathete des vorhergehenden die Hypotenuse des folgenden liefert. Da aber die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks kleiner ist als die Hypotenuse — ausgenommen der Fall von Dreiecken mit mehr als einem rechten Winkel, der hier nicht auftreten kann, — so werden die Konstruktionsgeraden beständig kleiner, und es kann nie eine spätere mit einer früheren zusammenfallen. Die Punktfolge konvergiert also nach einem Doppelelement, sagen wir B_1. Setze ich den Zug nach der anderen Seite hin fort $\mathfrak{B}, {}'\mathfrak{B}, {}''\mathfrak{B} \ldots$, so konvergiert er nach dem anderen Doppelelement B. Die Konstruktionsgeraden gehen dabei in die gemeinsamen Lote AB, A_1B_1 über, und da sie nach der einen Richtung beständig abnehmen, nach der anderen beständig wachsen, so folgt:

Von den beiden gemeinsamen Loten zweier windschiefen Geraden ist eines der kleinste, das andere der größte unter den Abständen aller Punkte einer Geraden von der anderen. [1])

Lege ich durch h die Ebenen ha, hb, so wird ihr Neigungswinkel durch die auf der absoluten Polaren h_1 eingeschnittene Strecke A_1B_1 gemessen; desgleichen mißt AB den Winkel der Ebenen h_1a, h_1b.

Zwei Geraden haben also zwei *extreme Abstände*, die ich durch eckige Klammern bezeichne $[ab]$, $[ab]_1$, und zwei Neigungswinkel, die durch runde Klammern dargestellt werden mögen (ab), $(ab)_1$; es ist $[ab] = (ab)_1$, $[ab]_1 = (ab)$.

Als *Moment zweier windschiefen Geraden* definiert D'Ovidio [2]) das Produkt der Sinus ihrer Abstände:

$$\begin{aligned}\mathrm{m}(a,b) &= \sin[ab] \cdot \sin[ab]_1 \\ &= \sin(ab) \cdot \sin(ab)_1;\end{aligned}$$

als *Kommoment* das Produkt ihrer Kosinus:

$$\begin{aligned}\mathrm{com}(a,b) &= \cos[ab] \cdot \cos[ab]_1 \\ &= \cos(ab) \cdot \cos(ab)_1.\end{aligned}$$

Nr. 14, 15.

1) Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Bd. II_1, 1891, p. 505 f.

2) D'Ovidio, Studio sulla Geometria projettiva, Ann. di Mat. II_6, p. 82. — Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Bd. II_1, p. 508 u. 512.

Wichtiger als beide ist ihr Verhältnis, das ich unter dem Namen *Parameter* einführen will:

$$\begin{aligned}\mathrm{p}(a,b) &= \mathrm{tg}[ab]\cdot\mathrm{tg}[ab]_1\\ &= \mathrm{tg}(ab)\cdot\mathrm{tg}(ab)_1.\end{aligned}$$

Dabei ist bisher das Vorzeichen ganz unberücksichtigt, wir werden es zum Ausdruck der Windung der beiden Geraden gegeneinander benutzen können

4. Perspektive Übertragung von Richtung und Drehsinn. Ist auf einer Geraden a eine Richtung $[a]_+$ willkürlich festgelegt, so ist nach Nr. 2 damit zugleich ein positiver Drehsinn $(a)_+$ um a bestimmt, so daß $[a]_+$ und $(a)_+$ eine positive Windung ausmachen, also durch ein positives Dreibein zusammenhängen. Richtung und Drehsinn von a rufen auf jeder zu a windschiefen Geraden b durch Perspektivität einen Drehsinn und eine Richtung hervor: der Drehsinn wird von einer Ebene des Ebenenbüschels (b) beschrieben, wenn ihr Schnittpunkt mit a die Richtung $[a]_+$ durchläuft; die Richtung wird von einem Punkte der Punktreihe $[b]$ beschrieben, wenn seine Verbindungsebene mit a das Ebenenbüschel (a) in dem Drehsinn $(a)_+$ durchstreift.

Ich behaupte nun: Richtung und Drehsinn von b stehen wieder in dem Zusammenhang einer positiven Windung. Die Behauptung ist bewiesen, wenn ich Richtung und Drehsinn von b durch Bewegung gleichzeitig mit $[a]_+$ und $(a)_+$ oder mit $[a]_-$ und $(a)_-$ zur Deckung bringen kann. Zu diesem Zwecke konstruiere ich die beiden gemeinsamen Lote AB und A_1B_1 von a und b, halbiere die Strecken AB und A_1B_1 in M und M_1, verbinde M, M_1 durch eine Gerade m und nehme mit der ganzen Figur um m eine Umwendung vor. Dabei kommt natürlich a auf b und b auf a zu liegen. Da ferner die Umwendung eine involutorische Bewegung ist, durch eine Wiederholung also ganz der alte Zustand wiederhergestellt sein muß, so kommt entweder $[a]_+$ auf die Richtung in $[b]$ und gleichzeitig diese in die alte Lage von $[a]_+$ zu liegen, oder $[a]_+$ läuft der Richtung in $[b]$ entgegen und gleichzeitig kommt diese mit $[a]_-$ zur Deckung. Ich brauche nur den ersten Fall zu erörtern. An der perspektiven Beziehung zwischen den Richtungen und Drehsinnen wird durch die Bewegung nichts geändert. Der Drehsinn von b in der neuen Lage ist also mit $[a]_+$ in der neuen Lage perspektiv, d. i. mit der alten Richtung von b. Folglich sind Richtung und Drehsinn von b gleichzeitig mit $[a]_+$ und $(a)_+$ — in der zweiten Annahme gleichzeitig mit

$[a]_-$ und $(a)_-$ — zur Deckung gekommen. Die Behauptung ist also bewiesen und wir haben den Satz:

Richtung und Drehsinn in positiver oder rechter Windung $[a]_+$ *und* $(a)_+$ *an einer Geraden* a *involvieren durch Perspektivität an jeder zu* a *windschiefen Geraden* b *Drehsinn und Richtung, die wieder in der Beziehung einer positiven Windung stehen* $(b)_+$ *und* $[b]_+$*. Perspektive Windungen haben gleiches Vorzeichen.*

Dieser einfache Satz herrscht auch in der Euklidischen Geometrie und gibt die Möglichkeit, von einer Geraden aus, auf der positive Richtung und positiver Drehsinn festgelegt ist, auf jeder zu dieser windschiefen Geraden positive Richtung und positiven Drehsinn zu bestimmen. [1]) Wir machen ihn zur Grundlage für die Theorie der Windung zweier Geraden.

Der obige Satz gilt natürlich auch für die zur ursprünglichen Geraden a absolut polare Gerade a'; beim Beweise macht die Unbestimmtheit der gemeinsamen Lote keine Schwierigkeit, weil ich für AB und A_1B_1 zwei beliebige absolutpolare Geraden nehmen kann, die sich auf a und a' stützen.

Drehe ich eine Ebene α um a, so läuft ihr Pol A' auf a' in derselben Richtung wie der Schnittpunkt von α mit a'; lasse ich einen Punkt A auf a laufen, so dreht sich seine absolute Polarebene α' um a' in demselben Sinne, wie die Ebene von a' nach A. Diese Elementenpaare erfüllen nämlich die absoluten Involutionen konjugierter Elemente von $[a']$ und (a'), welche elliptisch, also gleichlaufend sind. Daraus folgt:

Auch die absolute Polarität führt positive Richtung und positiven Drehsinn in positiven Drehsinn und positive Richtung über, d. h. sie erhält das Vorzeichen der Windung an einer Geraden.

5. Die Windung zweier Geraden gegeneinander. Jetzt seien auf einer Geraden a positive Richtung und positiver Drehsinn in der Beziehung einer rechten Windung festgelegt. Sie involvieren auf der absolutpolaren Geraden a' positiven Drehsinn und positive Richtung in derselben Beziehung. Beide induzieren auf einer dritten Geraden b je eine Richtung und einen Drehsinn, die wieder in der Beziehung rechter Windung stehen. Es sind zwei Fälle möglich: Entweder fallen die beiden Richtungen auf b und gleichzeitig die beiden Drehsinne zusammen, oder die Richtungen und gleichzeitig die Drehsinne laufen gegeneinander. Im ersten Falle sage ich,

---

1) Es ist dabei zu bemerken, daß die von einer Geraden a aus auf zwei beliebigen Geraden b und c festgelegten Richtungen und Drehsinne untereinander im allgemeinen nicht wieder in der Beziehung der Perspektivität stehen.

b ist gegen a und a' rechtsgewunden, im zweiten b ist gegen a und a' linksgewunden.

Ich definiere also: *Eine Gerade b heißt gegen a und ihre absolute Polare a' rechtsgewunden, wenn sie die positiven Richtungen und dann auch gleichzeitig die positiven Drehsinne zweier rechten Windungen von a und a', die ihrerseits in Perspektive stehen, perspektiv macht; tut sie das nicht, so heißt sie linksgewunden gegen a und a'.* [1])

Wenn ich zur Abkürzung die positiven Richtungen und Drehsinne zweier perspektiven rechten Windungen von a und a' gleich nenne, so kann ich sagen: Eine Gerade b heißt gegen a und a' rechtsgewunden, wenn sie durch ihr Ebenenbüschel bzw. durch ihre Punktreihe gleiche Richtungen und Drehsinne von a und a' in Perspektive setzt, sie heißt linksgewunden, wenn sie ungleiche Richtungen und Drehsinne perspektiv macht.

Zur Verdeutlichung sei diese Bestimmung in der Euklidischen Geometrie erläutert: Auf einer Geraden a seien positive Richtung und positiver Drehsinn so bestimmt, daß sie in der Beziehung einer rechten Windung stehen. Lege ich durch alle Punkte von a je eine zu a senkrechte Ebene, so wird in diesem Parallelebenenbüschel durch die Richtung auf a ein Durchlaufssinn bestimmt. Auf einer zu a windschiefen und sie nicht senkrecht kreuzenden Geraden b wird alsdann durch das Ebenenbüschel (a) mit seinem positiven Drehsinn sowohl, wie durch das Parallelebenenbüschel senkrecht zu a mit seinem positiven Durchlaufssinn je eine Richtung eingeschnitten. Wenn diese beiden Richtungen übereinstimmen, so heißt b gegen a rechtsgewunden, andernfalls linksgewunden.

Es ist klar, daß die so definierte Windung einer Geraden gegen die andre unabhängig ist von der ursprünglich in der Geraden a festgelegten Richtung. Da ferner Richtung und Drehsinn an einer Geraden, die in der Beziehung einer positiven Windung stehen, bei Bewegung der Geraden in dieser Beziehung verharren, und die Schnittverhältnisse, auf denen die obige Bestimmung beruht, durch Bewegung ebenso wenig verändert werden, so gilt: *Die Windung einer Geraden gegen eine andere wird durch Bewegung der ganzen Figur nicht geändert, durch Spiegelung aber geht sie in die entgegengesetzte über.* Mit Hinweis auf den Schlußsatz der Nr. 4 können wir hinzufügen: Auch die absolute Polarität erhält die Windung einer Geraden gegen eine andere; d. h. wenn b gegen a und a' rechtsgewunden ist, so ist auch b' gegen a und a' rechtsgewunden.

---

1) Vgl. Study, Am. Journ. of Math. vol. XXIX, 1907, p. 133.

Nehme ich jetzt wieder wie in Nr. 4 mit der ganzen Figur eine Umwendung um M, M_1, die Verbindungsgerade der Mitten der extremen Abstände von a und b, vor, so kommt a auf b zu liegen und b auf a, ohne daß doch die Windung von b gegen a sich dabei änderte. Es folgt: *Ist b gegen a rechts-(links-)gewunden, so ist auch a gegen b rechts-(links-)gewunden*; desgleichen b gegen a', a gegen b', a' gegen b und b', b' gegen a und a'.

Durch diese Festsetzungen haben je zwei Geraden eine bestimmte Windung außer, wenn sie sich schneiden oder rechtwinklig kreuzen.

6. Vorzeichen von Moment und Parameter. *Wir geben dem Moment und dem Parameter zweier windschiefen Geraden ein Vorzeichen durch die folgenden Bestimmungen*: In einem der gemeinsamen Lote h von a und b lege ich willkürlich eine positive Richtung $[h]_+$ fest; ich ergänze sie durch einen positiven Drehsinn $(h)_+$ zu einer positiven Windung und bestimme die mit dieser perspektiven Windung $[h_1]_+$, $(h_1)_+$ auf h_1. In

$$\begin{aligned} \mathrm{m}(a,b) &= \sin AB \cdot \sin B_1A_1, \\ \mathrm{com}(a,b) &= \cos AB \cdot \cos B_1A_1, \\ \mathrm{p}(a,b) &= \operatorname{tg} AB \cdot \operatorname{tg} B_1A_1 \end{aligned}$$

sollen die extremen Abstände AB, B_1A_1, wie die Bezeichnung angibt, in solchen Richtungen genommen werden, welche bei dem Umfahren eines der Vierseite ABB_1A_1 auftreten; die Strecken AB, B_1A_1 sind dabei mit positivem oder negativem Vorzeichen zu versehen, je nachdem die Richtungen AB, B_1A_1 mit den festgelegten positiven Richtungen $[h]_+$, $[h_1]_+$ übereinstimmen, oder ihnen entgegenlaufen.

Bei dieser Übereinkunft ist das Vorzeichen des Kommomentes immer positiv, weil die extremen Abstände immer kleiner, höchstens gleich $\frac{\pi}{2}$ sind. Moment und Parameter aber haben positives oder negatives Vorzeichen, aber untereinander immer gleiches.

Wir können dann den Satz beweisen.

Zwei rechtsgewundene Geraden haben positives Moment

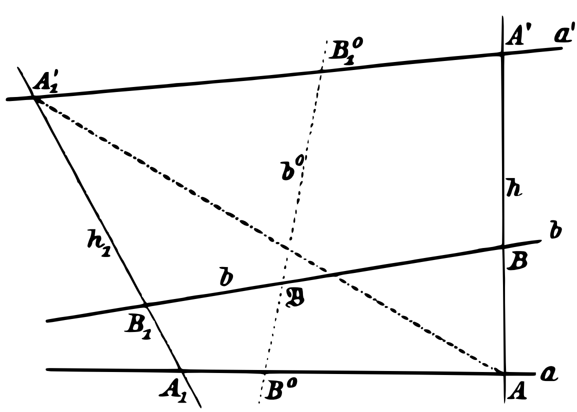

Fig. 2.

und positiven Parameter, zwei linksgewundene Geraden haben negatives Moment und negativen Parameter; auch die Umkehrung ist gültig.

Zum Beweise greifen wir zurück auf die von den Geraden a, a', b gebildete Figur; sie werden von den gemeinsamen Loten h, h_1 beziehungsweise geschnitten in den Punkten A, A', B; A_1, A_1', B_1. (Fig. 2.) Nehmen wir an, daß b gegen a und a' rechtsgewunden ist. Dann schneidet das in einem bestimmten Drehsinn $(b)_+$ durchlaufene Ebenenbüschel (b) in a und a' die positiven Richtungen $[a]_+$, $[a']_+$ von zwei rechten Windungen an a und a' ein, die zueinander perspektiv sind. Ich kann also sagen, die auf a, b, a' gestützte Regelschar $\mathfrak{R}$ setzt die beiden positiven Richtungen $[a]_+$ und $[a']_+$ in Perspektive. Nunmehr spiegele ich die ganze Figur an einer der beiden Ebenen durch die Gerade AA_1', welche einen der Winkel der beiden Ebenen $AA_1'A_1$ und $AA_1'A'$ halbieren. Dabei geht a in h, a' in h_1, b in b^0 und die Regelschar $\mathfrak{R}$ in die zugehörige Leitschar $\mathfrak{L}$ über. Vermittelte die Regelschar $\mathfrak{R}$ die Perspektivität zwischen den Richtungen zweier positiven Windungen an a und a', so setzt nach der Spiegelung die Leitschar $\mathfrak{L}$ die Richtungen zweier negativen Windungen an h und h_1 in Perspektive. Die Richtungen AB und A_1B_1 gehören also zu perspektiven negativen Windungen, folglich AB und B_1A_1 zu perspektiven positiven Windungen und es ist daher

$$\mathrm{m}(a, b) = \sin AB \cdot \sin B_1A_1 > 0.$$

Auf den Fall linker Windung brauche ich nicht besonders einzugehen, ebensowenig auf die Umkehrung des Satzes, die sich leicht ergibt, wenn man den eben geführten Beweis Schritt für Schritt rückwärts geht.

Die Windung ist unbestimmt nur in folgenden Fällen: 1. der Parameter ist null, das Moment ist null, einer der beiden Abstände ist null: die Geraden schneiden sich und das Kommoment gibt den Kosinus ihres Neigungswinkels. 2. Der Parameter ist unendlich, das Kommoment ist null, einer der beiden Abstände ist $\frac{\pi}{2}$, jede der Geraden schneidet die absolut polare Gerade der anderen: die beiden Geraden kreuzen sich rechtwinklig, und das Moment gibt den Sinus des zweiten Abstandes; hierin ist der Fall absolut polarer Geraden inbegriffen. 3. Der Parameter ist unbestimmt, Moment und Kommoment sind null, einer der beiden Abstände ist $\frac{\pi}{2}$, der andere null: die Geraden schneiden sich rechtwinklig.

§ 2. Projektive Behandlung der Parallelen.

7. Definition der Cliffordschen Parallelen. Kehren wir zurück zu der Überlegung, durch welche wir in Nr. 3 die gemeinsamen Lote zweier windschiefen Geraden a, b gewannen. Wir schnitten in die Punktreihe $[b]$ durch die Involutionen senkrechter Ebenen um a und ihre absolute Polare a' zwei elliptische Punktinvolutionen ein. Das gemeinsame Paar B, B_1 der beiden Punktinvolutionen gab die Stützpunkte der beiden gemeinsamen Lote, der Treffgeraden von a, b, a', b'. In dem Umstande, daß diese beiden Involutionen elliptisch sind, ist die Möglichkeit ihrer Identität gegeben — hierin liegt der Gegensatz zur hyperbolischen Geometrie. In diesem Falle würden sie beide mit der Involution absolut konjugierter Punkte auf b zusammenfallen. Alsdann geht von jedem Punkte der b eine Gerade aus, die a, b, a', b' schneidet, a, b, a', b' liegen in einer Regelschar und haben die Geraden der Leitschar zu gemeinsamen Loten.

Ich definiere: Zwei Geraden, die mehr als zwei gemeinsame Lote haben, heißen Cliffordsche Parallelen.

Wir sehen sofort: Zwei absolut polare Geraden sind parallel.

Sind zwei Geraden parallel, so sind sie auch zu ihren absoluten Polaren parallel, und diese sind es untereinander.

Liegen zwei Paare absolutpolarer Geraden auf einer Regelschar, so sind sie sämtlich untereinander parallel.

Fragen wir nun nach der Gesamtheit der Geraden, die zu einer Geraden a und ihrer absoluten Polaren a' parallel sind, so können wir die Antwort zunächst so formulieren: *Der Ort der Parallelen zu zwei absolutpolaren Geraden a, a' ist identisch mit dem Ort derjenigen Geraden, welche die absoluten Involutionen senkrechter Ebenen in den Ebenenbüscheln* (a), (a') *in Perspektivität setzen*, d. h. welche von den beiden Ebeneninvolutionen in ein und derselben Punktinvolution geschnitten werden. Die Beantwortung dieser Frage ist in der v. Staudt-Lürothschen Theorie der Strahlennetze mit imaginären Leitgeraden enthalten.[1])

8. Strahlennetz und windschiefe Involution. Wir bringen einige Sätze über die windschiefe Kollineation und das Strahlennetz in Erinnerung. Es gibt bekanntlich räumliche Kollineationen, in welchen die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte nicht wie im allgemeinen Fal-

1) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage. Heft 1. Nürnberg 1857, p. 77. N. 117. — Lüroth, Math. Ann. 8, p. 157. — Unsere Darstellung schließt sich an an Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie, I. 1892, p. 118 ff.

le einen tetraedralen Komplex, sondern nur eine lineare Kongruenz, ein Strahlennetz, erfüllen, man nennt sie *windschiefe Kollineationen.* Jeder Strahl des Netzes trägt eine Projektivität entsprechender Punkte und eine Projektivität entsprechender Ebenen. Die Ebenenprojektivität um jeden Strahl schneidet in alle anderen Netzstrahlen die Punktprojektivität ein; die Punktprojektivität auf jedem Strahl projiziert sich von allen anderen aus durch die zugehörige Ebenenprojektivität. Jedes Strahlennetz ist auf diese Weise Träger von ∞^1 windschiefen Kollineationen. Unter ihnen ist eine involutorische enthalten, eine *windschiefe Involution.* Die Doppelelemente der von den Netzstrahlen getragenen Punktinvolutionen sind die Stützpunkte auf den Leitgeraden.

Auf v. Staudt geht der Gedanke zurück, die imaginären Leitgeraden eines elliptischen Strahlennetzes durch die von ihm getragene stets reelle windschiefe Involution zu repräsentieren.

Wenn von einer windschiefen Involution die Ebeneninvolutionen um zwei windschiefe Geraden gegeben sind — sie müssen aber gleichartig, d. h. beide hyperbolisch oder beide elliptisch sein — *so ist die windschiefe Involution dadurch zweideutig bestimmt.*

Zum Beweise werden wir nach dem Ort der Strahlen fragen müssen, welche von den beiden Ebeneninvolutionen in derselben Punktinvolution geschnitten werden; also genau die Frage, auf welche wir durch die Untersuchung der Cliffordschen Parallelen zu zwei absolutpolaren Geraden geführt wurden.

Sind die beiden Involutionen hyperbolisch mit den Doppelebenen ϵ, ϵ'; ϕ, ϕ', so erkennt man den gesuchten Ort leicht als die Summe der beiden Strahlennetze, welche beziehungsweise die Geraden $\epsilon\phi$, $\epsilon'\phi'$ und $\epsilon\phi'$, $\epsilon'\phi$ zu Leitgeraden haben. Die von den gegebenen Ebeneninvolutionen auf ihren Strahlen eingeschnittenen Punktinvolutionen setzen die beiden windschiefen Involutionen zusammen.

9. Ableitung der Parallelennetze. In unserem Falle aber sind die absoluten Ebeneninvolutionen um die absolutpolaren Geraden a, a' beide elliptisch. Um den Ort der Geraden zu finden, die von ihnen in derselben Punktinvolution geschnitten werden, orientieren wir in v. Staudtscher Weise die Ebeneninvolutionen: Wir versehen a und a' je mit einer rechten Windung, so daß sie perspektiv sind. Da in einer elliptischen Involution entsprechende Ebenen das Büschel immer in dem gleichen Sinne durchlaufen, so kann ich jede elliptische Involution in zwei zerspalten durch Unterscheidung des Durchlaufungssinnes. Ich will jetzt die Zeichen $(a)_+$, $(a')_+$;

$(a)_-$, $(a')_-$ für die absoluten Ebeneninvolutionen um a und a' verwenden in der Weise, daß ich das Signum $_+$ oder $_-$ daranhänge, je nachdem die Involution in positivem oder negativem Drehsinn durchlaufen gedacht wird. Wir werden dann zwischen Geraden zu unterscheiden haben, die $(a)_+$ und $(a')_-$ auch dem Sinne nach perspektiv machen, und solchen, die $(a)_+$ und $(a')_-$ dem Sinne nach in Perspektive setzen; die ersten sind gegen a und a' rechtsgewunden (vgl. Nr. 5), die letzten linksgewunden.

Wenn eine Gerade b die Involutionen $(a)_+$ und $(a')_-$ in Perspektive setzt, so übertragen sich die absoluten Involutionen $(a)_+$ und $(a')_-$ auf die Punktinvolution $[b]_+$ durch Vermittlung der auf a, b, a' gestützten Regelschar. Alsdann vermittelt dieselbe Regelschar aber auch eine Perspektivität zwischen der absoluten Ebeneninvolution $(b)_+$ und den absoluten Punktinvolutionen $[a]_+$ und $[a']_+$, die ihrerseits wechselweis durch die Ebeneninvolutionen $(a')_+$ und $(a)_+$ eingeschnitten werden. Wir können also sagen: *Eine Gerade b, die durch ihre absolute Punktinvolution $[b]_+$ die absoluten Ebeneninvolutionen $(a)_+$, $(a')_+$ perspektiv macht, setzt durch ihre absolute Ebeneninvolution $(b)_+$ die absoluten Punktinvolutionen $[a]_+$, $[a']_+$ auch in Perspektive; und umgekehrt.* Entsprechendes gilt für eine Gerade, die $(a)_+$ und $(a')_-$ perspektiv macht.

Ich schneide jetzt die beiden Ebenenbüschel durch eine beliebige Ebene. (Fig. 3.) Die orientierten Involutionen übertragen sich auf die eingeschnittenen Strahlenbüschel mit den Scheiteln A, A'; wir nennen sie $(A)_+$, $(A)_-$, $(A')_+$, $(A')_-$. e sei der beiden Strahlenbüscheln gemeinsame Strahl, e_1 sein involutorisch entsprechender im Strahlenbüschel A, e'_1 sein entsprechender im Büschel A'. f, f_1 bzw. f', f'_1 seien die Paare der beiden Strahleninvolutionen, die zu e, e_1 bzw. e', e'_1 harmonisch liegen — solche sind bei elliptischen Involutionen bekanntlich immer reell vorhanden. [1]) Ich bilde die Schnittpunkte

$$e_1 e'_1 = E_1, \quad f f' = F, \quad f_1 f'_1 = F_1, \quad f f'_1 = G, \quad f_1 f' = G_1.$$

Die Gerade $FF_1 = t$ muß notwendig durch E_1 gehen, weil sowohl e_1 wie e'_1 in t den Punkt einschneiden, der vom Punkte $te = E$ durch die Punkte F, F_1 harmonisch getrennt wird. Dasselbe gilt vom Strahl $GG_1 = s$. Die Punktinvolutionen, welche in t und s von den Ebeneninvolutionen um a und a' eingeschnitten werden, haben daher zwei Paare gemein, nämlich EE_1, FF_1 bzw. $\mathfrak{E}E_1$, GG_1 und sind folglich identisch.

1) Steiner-Schröter-Sturm, Theorie der Kegelschnitte, Leipzig 1898, p. 61.

Nehmen wir noch an, daß e, f, e_1 bzw. e, f', e'_1 die positiven Drehsinne im Strahlenbüschel A bzw. A' angeben, so sieht man, daß t die Involutionen $(A)_+$ und $(A')_+$ auch dem Sinne nach perspektiv macht, s aber die Involutionen $(A)_+$ und $(A')_-$. t und s sind zugleich die einzigen Geraden dieser Eigenschaft, die in der beliebig angenommenen Ebene vorkommen.

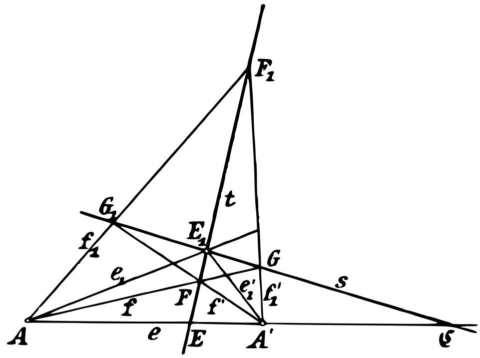

Fig. 3.

Das im vorigen Satze ausgesprochene duale Verhalten der gesuchten Geraden bezüglich der absoluten Punktinvolutionen auf den Geraden a, a' gestattet die Übertragung dieser Überlegung und ihres Resultates auf das Strahlenbündel. Wir schließen daher:

Der Ort der Strahlen, welche von zwei elliptischen Ebeneninvolutionen um die windschiefen Geraden a, a' in derselben Punktinvolution geschnitten werden, zerfällt in zwei elliptische Strahlennetze. Alle Strahlen des einen Netzes machen die orientierten Involutionen $(a)_+$, $(a')_+$ und gleichzeitig $[a]_+$, $[a']_+$ perspektiv, alle Strahlen des anderen die Involutionen $(a)_+$, $(a')_-$ und gleichzeitig $[a]_+$, $[a']_-$.

Für die Theorie der Cliffordschen Parallelen bedeutet dieses Resultat:

Zu zwei absolut polaren Geraden a, a' gibt es zwei Strahlennetze von Parallelen, alle Strahlen des einen sind gegen a und a' rechtsgewunden, alle Strahlen des anderen linksgewunden. Beide Netze sind elliptisch. Wir haben danach zwischen *Parallelen rechter* und *linker Windung, Rechtsparallelen* und *Linksparallelen* zu unterscheiden.[1])

10. Das Parallelennetz. Wir wissen bereits, daß, wenn b zu a parallel ist, auch b' zu a parallel ist, und daß b' gegen a dieselbe Windung hat wie b (vgl. Nr. 7). Daraus schließen wir: *Jedes der beiden Parallelennetze zu a und a' besteht aus Paaren absolutpolarer Geraden.*

Betrachten wir nur das eine Netz, das rechtsgewundene.

Ordnen wir jedem Punkte des Raumes den Punkt zu, der ihm in derjenigen absoluten Punktinvolution entspricht, welche von dem durch den Aus-

1) Study, Am. Journ. of Math. XXIX, p. 134, nennt umgekehrt rechtsgewundene Geraden linksparallel. Da für uns die Windung unmittelbar die Scheidung zwischen den beiden Arten von Parallelen gibt, erscheint die Bezeichnung des Textes natürlich; auch ist sie die ältere.

gangspunkt gehenden Netzstrahl getragen wird, so entsteht eine involutorische Raumverwandtschaft. Man erkennt sie unschwer als eine Kollineation; sie ist daher die vom Netz getragene windschiefe Involution. Wir finden: *Die windschiefe Involution, deren Träger ein Parallelennetz ist, führt den absoluten Polarraum so in sich selbst über, daß jedes Paar entsprechender Elemente der windschiefen Involution auch im absoluten Polarraum konjugiert ist.*

Gehen wir von zwei anderen absolutpolaren Geraden bb' des Netzes aus, so gehören ihm wieder zwei Parallelennetze zu. Eines davon ist notwendig dasselbe, wie das Parallelennetz von a, a', dem b, b' angehören. Denn in der windschiefen Involution dieses Netzes sind die absoluten Involutionen in den Ebenenbüscheln b und b' Involutionen entsprechender Ebenen; seine Strahlen werden von den absoluten Ebeneninvolutionen um b und b' in derselben Punktinvolution geschnitten. Alle Strahlen des Netzes sind also auch zu b, b' parallel. Da ferner alle Strahlen jedes der beiden Parallelennetze gegen b konstante Windung haben, so sind die Strahlen unseres Netzes gegen b ebenso gewunden wie a. Es folgt:

Das rechte (linke) Parallelennetz einer Geraden a ist zugleich rechtes (linkes) Parallelennetz für jede seiner Geraden.

Alle Geraden des einen Netzes sind zueinander rechtsgewunden parallel, alle des anderen linksgewunden parallel. Darin liegt der Satz: *Sind zwei Geraden zu einer dritten in derselben Windung parallel, so sind sie zueinander in derselben Windung parallel.*

Bei Bewegung und Spiegelung bleibt die definierende Eigenschaft zweier Parallelen, unendlich viele gemeinsame Lote zu besitzen, erhalten; Bewegung läßt auch die Windung ungeändert, Spiegelung führt sie in die entgegengesetzte über. Daraus folgt: *Bei einer Bewegung geht jedes Parallelennetz in ein gleichgewundenes, bei einer Spiegelung in ein ungleichgewundenes über.*

11. Zwei Parallelennetze. Damit beweisen wir den Satz:

Zwei ungleichgewundene Parallelennetze haben stets ein reelles Paar absolut polarer Geraden gemein; aber auch nie mehr als dieses.

Seien nämlich g und l zwei sich schneidende Strahlen beider Netze. ω sei eine der beiden Ebenen, die einen der Winkel (g, l) halbieren und auf der Ebene gl senkrecht stehen, O_1 ihr absoluter Pol. Dann geht durch die Spiegelung an ω und O_1 die g in l über, also auch das rechtsgewundene Netz der g in das linksgewundene der l. Bei einer Spiegelung bleiben die Strahlen in ω und diejenigen durch O_1 in Ruhe. Darum müssen die Strahlen beider

Netze, die beziehungsweise in ω liegen und durch O_1 gehen, zusammenfallen. Sie bilden das gemeinsame Paar absolutpolarer Geraden der beiden Netze, sind also zu g rechts-, zu l linksparallel.

Mehr als diese beiden Geraden können die Netze aber auch nicht gemein haben. Läge nämlich eine Regelschar in beiden Netzen, so müßten ihre sämtlichen Strahlen untereinander zugleich rechts- und linksparallel, also von unbestimmter Windung sein. Zwei Geraden unbestimmter Windung schneiden sich aber entweder, oder sie schneiden gegenseitig ihre absoluten Polaren, oder sie sind absolutpolar. Die beiden ersten Fälle scheiden aus, weil die Parallelennetze elliptisch sind, also keine zwei Netzstrahlen sich in einem reellen Punkte schneiden, der dritte, weil die Beziehung absolutpolarer Geraden eindeutig ist.

Ein Parallelennetz bestimmter Windung wird durch einen Strahl eindeutig festgelegt. Daraus folgt: *Zwei gleichgewundene Parallelennetze können keinen reellen Strahl gemein haben.* Und: *Die Parallelennetze gleicher Windung erfüllen ein lineares System zweiter Stufe.* Auf diesen Satz kommen wir in Nr. 17 eingehender zurück.

Wir fanden oben, daß die windschiefe Involution, die von einem Parallelennetz getragen wird, den absoluten Polarraum in sich selbst überführt. Schließen wir diesen Paragraphen mit der Umkehrung: *Wenn eine windschiefe Involution den absoluten Polarraum so in sich selbst überführt, daß je zwei in der windschiefen Involution entsprechende Elemente in dem absoluten Polarraum konjugiert sind, so wird sie von einem Parallelennetz getragen.*

Das Trägernetz muß aus Paaren absolut polarer Geraden bestehen; denn, wenn die windschiefe Involution einen Strahl in Ruhe läßt, so kann sie auch seinen absolut polaren Strahl nicht verändern. Die absoluten Ebeneninvolutionen um zwei solche Strahlen gehören der Verwandtschaft an und schneiden in jeden Netzstrahl dieselbe Punktinvolution ein, nämlich diejenige, die zu der räumlichen Verwandtschaft gehört. Aus dieser Eigenschaft konstruierten wir aber gerade die Parallelennetze.

§ 3. Elementare Parallelensätze.

12. Die Eigenschaft konstanten Abstandes, Konstruktion.

Die gemeinsamen Lote zweier Cliffordschen Parallelen sind sämtlich gleich lang.

Sind nämlich a, b die Parallelen, AB, $A'B'$ zwei gemeinsame Lote, so halbiere ich die Strecke AA' im Punkte M und nenne das in M fußende gemeinsame Lot MN. Nehme ich dann mit der ganzen Figur eine Umwendung um die Gerade MN vor, so kommt A auf A' zu liegen, B aber könnte zunächst auf einen von B' verschiedenen Punkt der Geraden b — er heiße B'' — fallen. Dann gäbe es aber von A' aus auf die Gerade b zwei Lote $A'B'$ und $A'B''$. Das ist unmöglich, also fällt AB mit $A'B'$ zusammen; die beiden willkürlich herausgegriffenen gemeinsamen Lote AB und $A'B'$ sind gleich lang.

Sind andrerseits die beiden absolutpolaren gemeinsamen Lote AB und A_1B_1 zweier windschiefen Geraden gleich lang, so sind die Geraden parallel.

In der Figur 1 entsteht alsdann der Widerspruch, daß die wachsenden und abnehmenden Konstruktionsgeraden nach gleichgroßen Strecken konvergieren müßten. Derselbe ist nur dadurch zu heben, daß die Projektivität auf der Geraden b eine Identität ist, daß also jedes Lot auf der einen Geraden, das die andere schneidet, zugleich auf dieser senkrecht steht.

Das Moment, das Kommoment, der Parameter zweier Cliffordschen Parallelen ist daher das Quadrat des Sinus, des Kosinus, des Tangens ihres konstanten Abstandes; Moment und Parameter sind dabei noch je nach der Windung mit positivem oder negativem Vorzeichen zu versehen.

Dual zu dem vorigen Satze gilt: Die Neigung zweier Cliffordschen Parallelen ist an allen gemeinsamen Loten dieselbe und gleich dem Abstand. Daraus folgt: *Jede von zwei Parallelen bildet mit jeder durch die andere gehenden Ebene denselben, dem Abstand gleichen Neigungswinkel.*

Diese Sätze gestatten die einfache Lösung der *Konstruktionsaufgabe*:

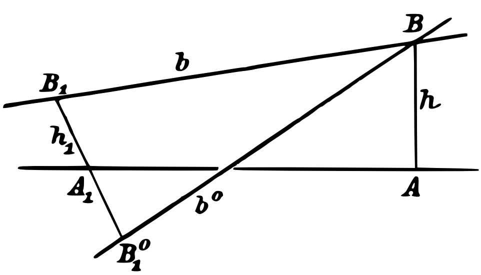

Fig. 4.

Durch einen Punkt B die Cliffordschen Parallelen zu einer gegebenen Geraden a zu ziehen. [1]) (Fig. 4.) Ich fälle von B das Lot h auf a, Fußpunkt A. Die absolute Polare h_1 schneidet a in A_1, auf ihr trage ich die Strecke AB von A_1 aus nach beiden Seiten ab A_1B_1, $A_1B_1^0$. Verbinde ich dann B mit B_1 und B_1^0, so sind diese Verbindungsgeraden b, b^0 die beiden

1) Bonola-Liebmann a. a. O. p. 200. — F. Schur gibt eine in einem beliebig vorgegebenen beschränkten Bereiche mögliche Konstruktion.

durch B gehenden Parallelen zu a, die eine ist rechts-, die andere linksparallel.

Sind umgekehrt b, b^0 zwei sich in B schneidende Geraden, dann gibt es nach dem Satze von Nr. 11, daß Parallelennetze ungleicher Windung ein reelles Paar absolut polarer Geraden gemein haben, zwei Geraden a, a' die zu b rechts-, zu b^0 linksparallel sind und zwei $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ die zu b links-, zu b^0 rechtsparallel sind. Ich kann sie mit B o n o l a so konstruieren: h sei das Lot in B auf der Ebene bb^0, h_1 seine in dieser Ebene gelegene absolute Polare. (Fig. 5.) Sie schneide b und b^0 in B_1 und B_1^0. A_1 sei der Mittelpunkt der Strecke $B_1B_1^0$, dann trage ich die Strecke A_1B_1 von B aus auf h nach beiden Seiten auf bis A und $\mathfrak{A}$. A_1A und $A_1\mathfrak{A}$ sind dann die gesuchten Geraden a und $\mathfrak{a}$, ihre absoluten Polaren ergeben sich, wenn wir an Stelle des Punktes A_1 den Halbierungspunkt A_1' der Ergänzungsstrecke von $B_1B_1^0$ nehmen.

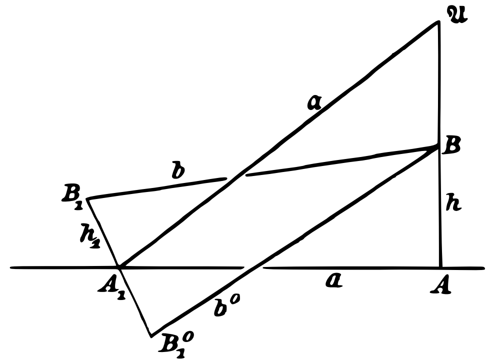

Fig. 5.

13. Winkel an Parallelen. Ich will zur bequemeren Formulierung der kommenden Sätze die folgende Bezeichnung einführen: *Wir nennen zwei Richtungen, zwei Drehsinne an zwei windschiefen Geraden gleichartig oder ungleichartig, wenn sie in der Orientierung durch zwei perspektive positive Windungen gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben.* [1])

Die gemeinsamen Lote zweier parallelen Geraden a, b bilden eine Regelschar, welche sich auch auf ihre absolut polaren Geraden a', b' stützt. Nehme ich an, daß a und b rechtsgewunden parallel sind, so kann ich jede der drei Geraden a, b, a' mit einer rechten Windung versehen, so daß diese Windungen zu je zweien perspektiv sind. Die Perspektivität wird vermittelt durch die Regelschar der gemeinsamen Lote; sie macht also auch zwei gleichartige Richtungen von a und b perspektiv. Sind a und b linksgewunden, so macht die Regelschar der gemeinsamen Lote ungleiche Richtungen von a und b perspektiv.

Nennen wir bei zwei parallelen Geraden solche *Richtungen parallel* oder *entsprechend*, welche durch die Regelschar der gemeinsamen Lote perspektiv gemacht werden, so gilt: *Bei rechtsgewundenen parallelen Geraden sind*

1) Sie wurde schon in Nr. 5 vorübergehend benutzt.

gleichartige, bei linksgewundenen ungleichartige Richtungen entsprechend. Im ersten Falle also $[a]_+$ und $[b]_+$, im zweiten $[a]_+$ und $[b]_-$.

Zwei parallele Geraden a, b werden von einer Geraden g geschnitten in A und B'; AB und $B'A'$ sind die beiden gemeinsamen Lote, die in A und B' fußen. Dann stimmen die beiden rechtwinkligen Dreiecke $AA'B'$ und $B'BA$ in der Hypotenuse und in den Katheten $A'B'$, BA überein, sind also kongruent. Folglich ist Winkel $A'AB' = BB'A$ und auch gleich dessen Scheitelwinkel. Orientiere ich die beiden Geraden a und b durch perspektive positive Windungen, und gebe auch dem Treffstrahl g eine feste Richtung, so kann ich sagen: *Ein gerichteter Treffstrahl zweier rechtsgewundenen Parallelen bildet mit gleichartigen, zweier linksgewundenen Parallelen mit ungleichartigen Richtungen gleiche Winkel*; also im ersten Falle mit $[a]_+$, $[b]_+$, im zweiten mit $[a]_+$, $[b]_-$.

14. Das windschiefe Parallelogramm erster Art. Wenn in einem windschiefen Viereck beide Gegenseitenpaare parallel sind, so nenne ich es ein *Parallelogramm.* [1])

Die Existenz windschiefer Parallelogramme beweise ich durch den Satz: *Wenn in einem Viereck P, Q, R, S zwei Seiten parallel und gleich sind, $PQ \parallel RS$, $PQ = RS$, und in dem Viereck so liegen, daß sie bei einer Umlaufung des Vierecks in nicht parallelen Richtungen durchlaufen werden, so sind auch die beiden anderen Seiten parallel und gleich, die gegenüberliegenden Winkel sind gleich, die anliegenden ergänzen sich zu zwei Rechten.* Dabei ist unter dem Viereck $PQRS$ selbstverständlich dasjenige unter allen von den vier Geraden gebildeten Vierecken gemeint, dessen Seiten sämtlich kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind. (Fig. 6.)

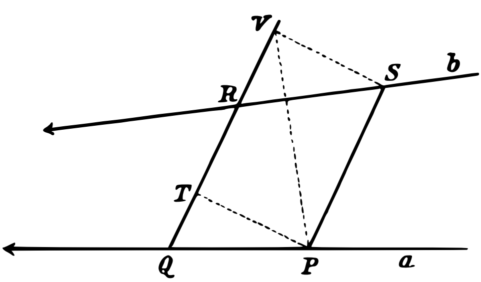

Fig. 6.

Die Diagonale PR bildet vermöge der im Satze gemachten Einschränkung mit den Vierecksseiten PQ und RS gleiche Winkel. Darum sind die Dreiecke PRQ und RPS kongruent, weil sie außerdem in PR und in $PQ = RS$ übereinstimmen. Es ist: $SP = QR$.

Ich fälle von P und S die Lote PT und SV auf QR. Wenn ich dann zeige, daß sie auch auf SP senkrecht stehen, so ist der Parallelis-

1) F. Klein, Math. Ann. 37, p. 558. — Bonola-Liebmann a. a. O., p. 199.

mus von SP und RQ erkannt: Es ist $\triangle PTQ \simeq SVR$ wegen $PQ = SR$, $\sphericalangle PQT = \sphericalangle SRV$ und $\sphericalangle PTQ = \sphericalangle SVR$, also $PT = SV$ und $QT = RV$. Dann ist $VT = RQ = SP$. Ziehe ich PV, so stimmen die beiden Dreiecke PSV und VTP in allen drei Seiten überein, also ist $\sphericalangle PSV = VTP = \frac{\pi}{2}$; ebenso liefert die Gerade ST die Winkelgleichheit: $\sphericalangle SPT = TVS = \frac{\pi}{2}$.

Eine große Summe der bekannten Sätze über das Euklidische Parallelogramm beweist sich leicht; natürlich verlangt der windschiefe Charakter gewisse Variationen. Ich hebe hervor:

Die Diagonalen eines Parallelogramms werden durch ihre gemeinsamen Lote halbiert:

Halbiere ich nämlich die Diagonale PR des Parallelogramms $PQRS$ (Fig. 7) in M und errichte in M dasjenige Lot h auf PR, welches in der Winkelhalbierungsebene des von den Halbebenen PRQ, PRS gebildeten Winkels liegt, so kommt bei einer Umwendung um h das Dreieck PRQ an die Stelle von RPS und umgekehrt, also hat sich auch die Diagonale QS umgelegt, d. h. h steht auch auf QS und zwar in ihrem Mittelpunkt N senkrecht. Das andre gemeinsame Lot ergibt sich, wenn ich statt M den Mittelpunkt der Ergänzungsstrecke von PR nehme.

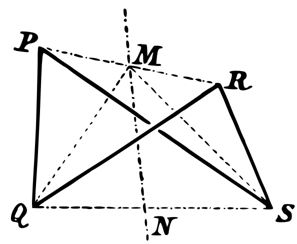

Fig. 7.

Wenn ein windschiefes Viereck vier rechte Winkel hat, ohne daß die Gegenseiten absolutpolar sind, so ist es sofort als Parallelogramm zu erkennen; wir nennen es *Rechteck*. Im Rechteck sind die Diagonalen gleich lang, denn Dreieck PQR ist kongruent SRQ.

Im Rhombus kreuzen sich die Diagonalen rechtwinklig. (Fig. 7.) Betrachte ich hier die gleichschenkligen und unter einander kongruenten Dreiecke PQR und PSR, und fälle von den Spitzen Q und S die Lote auf die gemeinsame Grundlinie PR, so stehen diese beide im Mittelpunkt M von PR senkrecht, also liegt die andre Diagonale QS in einer zu PR senkrechten Ebene.

15. Konstruktion des Parallelogramms 1. Art. Der Hauptsatz von Nr. 14 erlaubt folgende Konstruktion von Parallelogrammen zwischen denselben beiden Parallelen a, b: c schneide a, b in A, B; ich trage von A und B aus auf a und b dieselbe Strecke in gleichartigen oder ungleichartigen Richtungen auf, je nachdem a und b rechts- oder linksparallel sind. Die Verbindungsgerade d der Endpunkte ist immer zu c parallel. Es erhebt sich die Frage: sind die Gegenseitenpaare dieser so entstehenden Parallelogramme — ich will sie zum Unterschied von anderen später zu besprechenden *Parallelogramme der ersten Art* nennen — in der gleichen oder in entgegengesetzter Windung parallel? Alle Geraden d', d'' — die ich wie oben d konstruiere, bilden nicht nur mit c, sondern auch unter einander Gegenseiten von Parallelogrammen, deren andere Gegenseiten in a und b liegen. c, d, $d' \cdots$ sind darum sämtlich parallel und zwar alle in derselben Windung, weil zwei ungleich gewundene Parallelennetze keine drei Strahlen gemein haben können. Trage ich auf a und b von A und B aus gerade die Strecke AB auf, so entsteht nicht ein gewöhnliches Parallelogramm, sondern ein Rhombus. Von einem Rhombus habe ich aber bewiesen, daß die eine Diagonale in der Mittellotebene der anderen liegt. Folglich geht durch Spiegelung an einer solchen Ebene der Rhombus in sich selbst über und zwar so, daß die Gegenseitenpaare sich vertauschen. Zwei Parallelenpaare aber, welche durch Spiegelung in einander übergehen, sind ungleich gewunden; darum sind die Gegenseitenpaare eines Rhombus verschieden gewunden, und es folgt allgemein:

Die Gegenseitenpaare der durch den Satz der Nr. 14 konstruierbaren Parallelogramme erster Art sind in verschiedener Windung parallel.

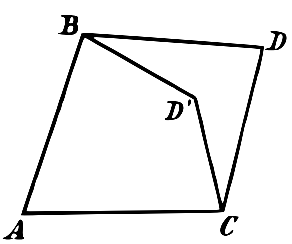

Fig. 8.

Zwei Strecken AB, AC mit gemeinsamem Anfangspunkt kann ich stets auf zwei Weisen zu einem Parallelogramm erster Art ergänzen: 1. ich ziehe durch B die rechte Parallele zu AC und durch C die linke zu AB, Schnittpunkt D. Oder 2. ich ziehe durch B die linke Parallele zu AC und durch C die rechte zu AB, Schnittpunkt D'. (Fig. 8.)

16. Das windschiefe Parallelogramm zweiter Art. Es gibt aber auch Parallelogramme, deren Gegenseitenpaare in der gleichen Windung parallel sind, *Parallelogramme zweiter Art.* In der eben betrachteten Figur werden solche Parallelogramme entstehen, wenn CD auch die BD' und CD' auch die BD schneidet, das heißt, wenn die Ebenen durch B und C, welche die Parallelen zu AC bzw. AB enthalten, zusammenfallen.

Notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß die Diagonale BC die Länge $\dfrac{\pi}{2}$ hat. (Fig. 9.) Die Parallelen durch B zu AC liegen nämlich in der Ebene β, welche auf dem von B auf AC gefällten Lote BF senkrecht steht. Damit die Parallelen zu AB durch C in dieselbe Ebene β fallen, muß C der Schnittpunkt der Geraden AC mit β sein, d. h.

BC und CF sind gleich $\frac{\pi}{2}$. Damit die Ebene γ der Parallelen durch C zu AB mit β zusammenfällt, ist $BC = \frac{\pi}{2}$ aber auch hinreichende Bedingung. Denn errichte ich jetzt in der Ebene ABC das Lot CG auf BC, das dann auf β senkrecht steht, so liegt es in der absoluten Polarebene von B und ist infolgedessen das Lot von C auf AB. Da aber die Ebene γ auf diesem senkrecht steht, so ist sie mit β identisch. D, D' sind die Schnittpunkte ungleich gewundener Parallelen zu AB und AC, so daß $ABDC$, $ABD'C$ nach wie vor Parallelogramme erster Art liefern; E, E' sind die Schnittpunkte gleich gewundener Parallelen zu AB und AC, so daß $ABEC$, $ABE'C$ Parallelogramme der zweiten Art sind.

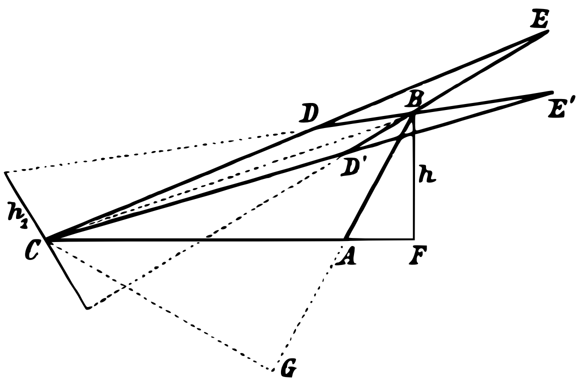

Fig. 9.

Auch von diesen Parallelogrammen zweiter Art lassen sich unschwer elementare Sätze, weniger ähnlich dem Euklidischen Parallelogramm, nachweisen.

Ich beschränke mich auf die Bemerkungen: Die Diagonalen des Parallelogramms zweiter Art haben die Länge $\frac{\pi}{2}$, sie sind parallel aber in anderer Windung als die Gegenseitenpaare. Die Parallelogramme zweiter Art führen daher auf *Tetraeder mit lauter Paaren paralleler Gegenkanten. Die Mannigfaltigkeit ist um eins geringer als diejenige der Parallelogramme erster Art.* Sind nämlich a, b zwei parallele Geraden, c eine beliebige Treffgerade, so bestimmten a, b, c ∞^1 Parallelogramme der ersten Art: ich brauchte von den Stützpunkten der c auf a und b nur in parallelen Richtungen von a und b gleiche Strecken abzutragen, um die ∞^1 Parallelogramme zu erhalten. Dagegen bestimmen a, b, c nur ein Parallelogramm zweiter Art. Die beiden gesuchten Ecken auf a und b müssen von den gegenüberliegenden, also von den Stützpunkten der c auf b und a die Entfernung $\frac{\pi}{2}$ haben; sie werden von den absoluten Polarebenen dieser Punkte eingeschnitten und sind dadurch eindeutig bestimmt.

17. Parallele Strahlenbüschel. Es liege ein Strahlenbüschel (A, α) vor; ich will durch einen beliebigen Punkt A' die rechtsgewundenen Parallelen zu seinen Strahlen legen. (Fig. 10.) Dazu kann ich so verfahren: Ich suche die linksgewundene Parallele p zu der Geraden $q = AA'$, welche in der Ebene α liegt. Ein beliebiger Strahl a von (A, α) schneidet p in P; ich trage auf p von P aus die Strecke AA' ab bis P', und zwar, wenn ich die Richtung AA' als positiv nehme und durch sie nach Nr. 4 eine Richtung auf q festlege, nach der negativen Richtung. Dann ist nach Nr. 14 $APP'A'$ ein Parallelogramm und $a' = A'P'$ ist zu a rechtsparallel. Daraus folgt:

Ziehe ich durch einen beliebigen Punkt die rechten (linken) Parallelen zu den Strahlen eines Strahlenbüschels, so bilden sie wieder ein Strahlenbüschel.

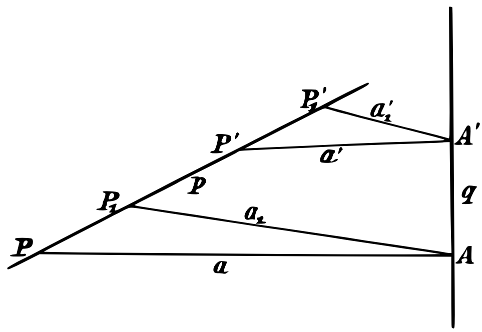

Fig. 10.

Dasselbe ergibt sich, wenn ich die in einer Ebene liegenden Parallelen zu den Strahlen des gegebenen Strahlenbüschels ziehe. Die sämtlichen Parallelen ein und derselben Windung zu den Strahlen eines Strahlenbüschels erfüllen also einen linearen Komplex; derselbe besteht aus ∞^1 Parallelennetzen der gleichen Windung. Greife ich von zwei beliebigen gleichgewundenen Parallelennetzen zwei sich schneidende Strahlen heraus, so bestimmen diese ein Strahlenbüschel und damit einen linearen Komplex, dem die gegebenen und noch ∞^1 Parallelennetze der gleichen Windung angehören. Auf diese ausgezeichneten linearen Komplexe kommen wir noch zurück (s. Nr. 37), hier notieren wir nur den Satz, der die projektive Untersuchung der Parallelennetze abschließt: *Die Parallelennetze gleicher Windung bilden eine lineare zweifache Mannigfaltigkeit.*

Sind in derselben Figur a, a_1 zwei beliebige Strahlen von (A, α), a', a_1' ihre rechten Parallelen durch A' und schneiden die ersten die Gerade p in P und P_1, die letzten dieselbe Gerade p in P' und P_1', so folgt aus den windschiefen Parallelogrammen erster Art $APP'A'$ und $AP_1P_1'A'$, daß die beiden Dreiecke APP_1 und $A'P'P_1'$ in allen drei Seiten, also auch in den Winkeln bei A und A' übereinstimmen. Es gilt daher: *Winkel mit parallel gerichteten Schenkeln derselben Windung sind gleich.*

18. Ein Satz von Study und Hjelmslev. Damit beweisen wir leicht einen von Hjelmslev und Study stammenden Satz.[1])

1) Joh. Petersen (Hjelmslev), Géométrie des droites dans l'espace non euclidienne, Overs. o. d. kgl. danske vidsk. forhandlinger, 1900, p. 305. — Study, Jahresber. d. d. Math.-Ver., Bd. 11, p. 319. Am. Journ. of Math., Bd. XXIX, p. 130.

a, b seien zwei windschiefe Geraden, h, h_1 ihre gemeinsamen Lote mit den Endpunkten AB, A_1B_1. a und b seien rechtsgewunden und $AB < A_1B_1$. Ich ziehe durch A die rechte und linke Parallele zu b, indem ich auf h_1 von B_1 aus die Strecke AB nach derselben Seite, auf welcher A_1 liegt, und nach der entgegengesetzten Seite hin abtrage bis B', B'' und diese Punkte mit A verbinde durch b', b''. Der Winkel $A_1AB' = (ab')$ wird dann gemessen durch die Strecke $B'A_1$, er ist also gleich der Differenz der beiden extremalen Abstände von a und b, der Winkel $A_1AB'' = (ab'')$ ist gleich der Strecke A_1B'', also gleich der Summe derselben Abstände. Ziehe ich jetzt durch einen beliebigen Punkt P des Raumes die beiden rechten und die beiden linken Parallelen zu a und b, $a_\mathfrak{r}$, $b_\mathfrak{r}$, $a_\mathfrak{l}$, $b_\mathfrak{l}$, so ist nach dem vorigen Satze $\sphericalangle a_\mathfrak{r}b_\mathfrak{r} = \sphericalangle ab'$, $\sphericalangle a_\mathfrak{l}b_\mathfrak{l} = \sphericalangle ab''$. Es gilt also, indem ich die Untersuchung für linksgewundene Geraden a, b übergehe, der Satz:

Ziehe ich durch einen beliebigen Punkt P des Raumes die rechten $(a_\mathfrak{r}, b_\mathfrak{r})$ und linken $(a_\mathfrak{l}, b_\mathfrak{l})$ Parallelen zu zwei windschiefen Geraden a, b des Raumes, so ist der Winkel der beiden rechten Parallelen $\sphericalangle a_\mathfrak{r}b_\mathfrak{r}$ gleich der Differenz, der Winkel der linken $\sphericalangle a_\mathfrak{l}b_\mathfrak{l}$ gleich der Summe der beiden Abstände von a und b, wofern a und b rechtsgewunden sind; sind a und b linksgewunden, so ist $\sphericalangle a_\mathfrak{r}b_\mathfrak{r}$ die Summe, $\sphericalangle a_\mathfrak{l}b_\mathfrak{l}$ die Differenz der Abstände.

19. Ein Satz über parallele und gleiche Strecken. α und α' seien zwei ganz beliebige Ebenen mit der Schnittgeraden p. a, eine beliebige Gerade in α, schneidet p in A, a', ihre rechtsgewundene Parallele in α', schneidet p in A'. Dann sind die Strahlenbüschel A, α, A', α' rechtsparallel im Sinne von Nr. 17, denn a ist rechtsparallel zu a' und der gemeinsame Strahl p ist es zu sich selbst. Nun sei q eine beliebige Linksparallele zu p und schneide α und α' in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$. Dann ist $A\mathfrak{A}\mathfrak{A}'A'$ ein windschiefes Parallelogramm erster Art, denn wäre $A'\mathfrak{A}'$ nicht zu $A\mathfrak{A}$ rechtsparallel, so gäbe es zwei Parallelen durch A', eine in dem Strahlenbüschel (A', α'), und zweitens diejenige, welche den Zug $A'A\mathfrak{A}q$, in welchem p und q schon linksparallel sind, zu einem windschiefen Parallelogramm erster Art ergänzt. Darum ist $AA' = \mathfrak{A}\mathfrak{A}'$. Alle Linksparallelen zu p werden also von α und α' in zwei Punkten geschnitten, welche die Entfernung AA' haben. Das gilt dann insbesondere auch von der absoluten Polaren zu p; die auf ihr eingeschnittene Strecke mißt aber den Winkel der Ebenen α, α'. Darum gilt folgender merkwürdige und wohl noch nicht beachtete Satz:

Zwei beliebige Ebenen schneiden auf allen Strahlen der beiden zu ihrer Schnittgeraden gehörigen Parallelennetze gleiche Strecken aus; die Länge der Strecken ist dem Winkel der Ebenen gleich. Und dual: *Zwei beliebige*

Punkte eines Strahles eines Parallelennetzes werden aus allen Strahlen des Netzes durch Ebenen projiziert, welche einen Winkel von konstanter Größe bilden, nämlich gleich dem Abstand der beiden Punkte.

Ich erinnere daran, daß ich die in Nr. 9 gegebene Herleitung der Parallelennetze zu zwei absolutpolaren Geraden a, a' auch so formulieren kann: Die Parallelen bilden den Ort der Geraden, welche von jedem Paar senkrechter Ebenen durch a sowohl wie durch a' unter der Strecke $\frac{\pi}{2}$ geschnitten werden.

§ 4. Über die Bewegungen.

20. Jede Bewegung ist eine Schraubung. Bleibt bei einer Bewegung ein Punkt, eine Ebene, eine Gerade in Ruhe, so gilt dasselbe von der zugehörigen absoluten Polarebene, dem absoluten Pol, der absolutpolaren Geraden.

Bleiben bei einer Bewegung alle Punkte einer Geraden in Ruhe, so verändern sich daher auch die Ebenen durch die absolutpolare Gerade nicht. Ich kann sagen: *Eine Drehung um eine Gerade a ist zugleich eine Verschiebung längs der absolutpolaren Geraden a'; die Verschiebungsstrecke ist gleich dem Drehwinkel.*

Jede Bewegung, die eine Gerade a in Ruhe läßt, ist eine *Schraubung*; sie ist auf eindeutige Weise [1]) aus einer Drehung um a und einer Verschiebung längs a zusammensetzbar. Drehung und Verschiebung sind als Spezialfälle unter den Schraubungen um eine Gerade enthalten. Drehung und Verschiebung an derselben Geraden sind vertauschbar.

Wir unterscheiden *rechtsgewundene und linksgewundene Schraubungen.* Eine Schraubung heißt rechtsgewunden, wenn der Drehsinn der Drehung und die Richtung der Verschiebung, die sie zusammensetzen, in der Beziehung einer positiven Windung stehen, linksgewunden, wenn sie in der Beziehung einer negativen Windung stehen.

Eine Schraubung um eine Gerade a ist zugleich eine Schraubung um die absolutpolare Gerade a'. Der Drehwinkel der ersten Schraubung ist gleich der Verschiebungsstrecke der zweiten, die Verschiebungsstrecke der zweiten gleich dem Drehwinkel der ersten. Beide Schraubungen haben dieselbe Windung. Richtung und Drehsinn der zweiten Schraubung sind nämlich

---

1) Eindeutig nur, wenn ich Verschiebungsstrecke und Drehwinkel kleiner als $\frac{\pi}{2}$ wähle, sonst vierdeutig.

perspektiv zu Drehsinn und Richtung der ersten. Der Satz aber, daß perspektive Windungen gleiches Vorzeichen haben (Nr. 10) war die Grundlage unserer Windungstheorie. Wir haben:

Jede Schraubenbewegung rechter, linker Windung um eine Gerade a, ist zugleich eine Schraubung rechter, linker Windung um die absolutpolare Gerade a'.

Bei jeder räumlichen Kollineation bleibt ein Koinzidenztetraeder in Ruhe. [1]) Wenn seine Ecken und Ebenen nicht sämtlich reell sind, so sind sie paarweis konjugiert imaginär, also die Verbindungsgeraden bzw. Schnittgeraden sind jedenfalls reell. Es bleiben daher bei jeder Bewegung sicher zwei absolutpolare Geraden in Ruhe, und wir haben:

Jede Bewegung ist eine Schraubung. [2])

Ein Parallelennetz geht durch Bewegung in ein gleichgewundenes über. Darum bleiben bei einer Schraubung die zu den Achsen gehörigen Parallelennetze in Ruhe; wir schließen: *Bei jeder Bewegung geht ein rechts- und ein linksgewundenes Parallelennetz in sich selbst über*; es sind das die Parallelennetze zu den Achsen.

21. Die Parallelverschiebung. Eine für die elliptische Geometrie charakteristische Bewegungsform tritt ein, wenn ich den Drehwinkel der Schraubung der Verschiebungsstrecke gleich mache. Ist nämlich in diesem Falle h die Anfangs-, h_0 die Endlage einer zu den Achsen a, a' der Schraubung senkrechten Geraden, schneiden h und h_0 die a und a' in den Punkten A, A'; A_0, A'_0, so sind die Strecken AA_0 und $A'A'_0$ zwei gleichlange gemeinsame Lote von h und h_0; h und h_0 sind also parallel. Errichte ich in einem Punkte P von h das gemeinsame Lot von h und h_0, es schneide h_0 in P_0, dann geht durch die Schraubung, deren Drehwinkel und Verschiebungsstrecke gleich AA_0 sind, P in P_0 über. Wir schließen daraus, daß die Verbindungsgerade der Anfangs- und Endlage jedes Punktes eine Parallele zur Achse ist, und zwar eine rechts- oder linksgewundene, jenachdem die Schraubung rechter oder linker Windung ist; denn da die Schraubung um a zugleich eine Schraubung gleicher Windung um a' ist, so macht PP_0 im Fall einer rechtsgewundenen Schraubung zwei rechte Windungen an a und a' perspektiv, im Fall einer linksgewundenen zwei linke.

Daraus folgt weiter, daß bei einer solchen Bewegung nicht nur die Achsen a, a', von denen wir ausgingen, sondern alle Strahlen eines Parallelennetzes in Ruhe bleiben; die Achsen der Schraubung sind also in diesem

1) Reye, Geometrie der Lage. Bd. II, p. 71.

2) Lindemann, Über unendlich kleine Bewegungen usw., Math. Ann. 7, p. 73.

Parallelennetz unbestimmt. Jeder Punkt des Raumes verschiebt sich auf dem durch ihn gehenden Strahl des Netzes um ein und dieselbe Strecke, jede Ebene dreht sich um die in ihr liegende Gerade des Parallelennetzes um ein und denselben Winkel. Drehwinkel und Verschiebungsstrecke sind gleich. Wir nennen diese Bewegungen *Parallelverschiebungen* und fassen zusammen:

Bei einer Parallelverschiebung läuft jeder Punkt auf einem Strahl eines Parallelennetzes, jede Ebene dreht sich um einen Strahl desselben Netzes. Drehwinkel und Verschiebungsstrecke sind allenthalben gleich.

Wir unterscheiden, je nachdem das Grundnetz rechts- oder linksgewunden ist, *rechte oder linke Parallelverschiebungen.*

Projektiv betrachtet ist eine Parallelverschiebung eine windschiefe Kollineation, die von dem Parallelennetz getragen wird. Zu jedem Parallelennetz gehören der variabeln Größe der Verschiebungsstrecke entsprechend ∞^1 Parallelverschiebungen; jede windschiefe Kollineation, die von einem Parallelennetz getragen wird, ist eine Parallelverschiebung. Unter diesen ist auch eine windschiefe Involution enthalten. Wir erkennen daher die windschiefe Involution, durch die wir in Nr. 9 die elliptischen Parallelennetze festlegten, als involutorische Parallelverschiebung, d. h. als eine Parallelverschiebung, bei der Verschiebungsstrecke und Drehwinkel gleich $\frac{\pi}{2}$ sind.

Bei einer rechten Parallelverschiebung bleibt jeder Strahl eines rechten Parallelennetzes in Ruhe, darum geht das zu ihm gehörige linke Parallelennetz in sich selbst über. Also: *Bei einer rechten Parallelverschiebung geht jedes linke Parallelennetz, bei einer linken Parallelverschiebung jedes rechte Parallelennetz in sich selbst über.*

22. Komposition einer Bewegung aus Parallelverschiebungen. *Die Parallelverschiebungen gleicher Windung bilden eine zweigliedrige Gruppe.*

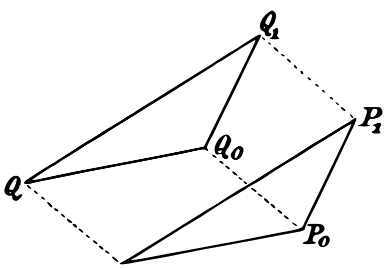

Fig. 11.

Wir beweisen, daß die Aufeinanderfolge zweier rechten Parallelverschiebungen wieder eine rechte Parallelverschiebung ist. P und Q seien zwei beliebige Punkte. (Fig. 11.) Durch die erste Parallelverschiebung kommen sie nach P_0 und Q_0, und diese werden durch die zweite Parallelverschiebung nach P_1, Q_1 gebracht. Dann sind PP_0 und QQ_0 sowohl, wie P_0P_1 und Q_0Q_1 rechtsparallel. Weil bei einer rechten Parallelverschiebung alle linksgewundenen Parallelennetze in sich selbst übergehen, so ist PQ linksparallel zu P_0Q_0 und dieses linksparallel zu P_1Q_1. PQQ_0P_0 und $P_0Q_0Q_1P_1$ sind daher Parallelogramme erster Art. PQ und P_1Q_1 sind linksparallel und parallel gerichtet. Darum ist auch PQQ_1P_1 ein Parallelogramm erster Art. PP_1 und QQ_1 sind rechtsparallel. Die Verbindungsgeraden der Anfangs- und Endlage eines Punktes in der resultierenden Bewegung sind also allenthalben rechtsparallel; dadurch ist eine rechte Parallelverschiebung charakterisiert.

Nehme ich die beiden Parallelverschiebungen in umgekehrter Reihenfolge vor, wobei zuerst P nach P_0' komme, dann P_0' nach P_1', so fällt P_1' im allgemeinen nicht mit P_1 zusammen, weil nach Nr. 16 zwei beliebige Strecken mit einem gemeinsamen Endpunkt — PP_0 und P_0P_1 — sich nicht zu einem windschiefen Parallelogramm zweiter Art, in dem die Gegenkanten in gleicher Windung parallel sind, ergänzen lassen.

Es folgt: *Zwei Parallelverschiebungen gleicher Windung sind nicht vertauschbar.*

Weil aber zwei beliebige Strecken PP_0, P_0P_1, welche den Weg eines Punktes P in einer rechten und einer darauffolgenden linken Parallelverschiebung bezeichnen, sich stets zu einem Parallelogramm erster Art ergänzen lassen, indem ich durch P die linke Parallele, durch P_1 die rechte Parallele zu P_0P_1 bzw. zu PP_0 ziehe, die sich in P_0' schneiden mögen, so komme ich zu demselben Punkte P_1, wenn ich die beiden Parallelverschiebungen in umgekehrter Reihenfolge vornehme, und es folgt:

Zwei ungleich gewundene Parallelverschiebungen sind vertauschbar. [1])

Lasse ich eine rechtsparallele Gerade p zu einer Geraden a um a rotieren, so beschreibt sie eine rotatorische Regelschar, deren sämtliche Strahlen untereinander und zur Achse a rechtsparallel sind; wir kommen auf die *Cliffordsche Regelschar* in Nr. 26 genauer zurück. Die erzeugte Fläche hat in jedem Punkte konstanten Abstand von a. Die Geraden der Leitschar sind daher zu a und untereinander ebenfalls parallel, und zwar linksparallel. Ich will aus dieser Bemerkung hier nur den Satz folgern: Ziehe ich durch zwei Punkte P und P_1, die von einer Geraden a gleichen Abstand haben, die rechte bzw. linke Parallele zu a, so schneiden sich diese.

Liegt eine beliebige Schraubung vor, bei der P, P_1 Anfangs- und Endlage eines Punktes sind, so sind sie gleichabständig von der Achse a der Schraubung. Die rechte Parallele zu a durch P und die linke durch P_1

1) Ball, a. a. O. p. 177.

schneiden sich in P_0, die linke durch P und die rechte durch P_1 in P_0'. Dann ist $PP_0P_1P_0'$ ein windschiefes Parallelogramm erster Art. Ich kann daher den Punkt P nach P_1 bringen durch die Aufeinanderfolge einer rechten und einer linken Parallelverschiebung längs der Achse a. Da aber eine Schraubung um eine Achse durch die Anfangs- und Endlage eines Punktes bestimmt ist, andrerseits jede Bewegung durch eine Schraubung dargestellt wird, so folgt:

Jede Bewegung ist aus zwei ungleich gewundenen Parallelverschiebungen zusammensetzbar. Diese sind eindeutig bestimmt und untereinander vertauschbar. [1])

Zweiter Abschnitt
Die linearen Liniengebilde.

§ 1. Die Regelscharen zweiter Ordnung.

23. Die Achsenverhältnisse. Eine gescharte Fläche zweiter Ordnung besitzt Polartetraeder nur von einem Typus [2]): Zwei gegenüberliegende Kanten schneiden die Fläche imaginär, die vier anderen reell. Sie hat mit dem absoluten Polarraum (mindestens) ein stets reelles Polartetraeder gemein O, O_1, M, M', *das Haupttetraeder*; seine Ecken sind *Mittelpunkte* der Fläche, seine Ebenen nennen wir *Hauptebenen*, seine Kanten *Achsen* der Fläche. Unter diesen seien die beiden imaginär schneidenden OO_1, MM' als *elliptische*, die anderen als *hyperbolische Achsen* bezeichnet. (Fig. 12.)

Spiegelung an einem Mittelpunkt oder, was dasselbe ist, an einer Hauptebene, führt die Fläche in sich selbst über, indem die eine Schar mit der anderen vertauscht wird; bei einer Umwendung um eine Achse aber geht jede Schar in sich selbst über. [3])

---

1) F. Klein, Math. Ann. 37. p. 548.

2) Schröter, Oberflächen zweiter Ordnung und Raumkurven dritter Ordnung, Leipzig 1880, p. 166.

3) Über die Achsenverhältnisse der Kurven und Flächen zweiten Grades siehe: W. Killing, Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig 1885. Abschnitt I. § 5, Abschnitt II. § 6. — Story, On non-euclidean properties of conics. Am. Journ. of Math., vol. V, 1882, p. 358.

Ich will die Mittelpunkte O und O_1 und die Hauptebenen $OMM' = \omega$, $O_1MM' = \omega_1$ bevorzugen. Die Scheitelpunkte auf den Achsen OM; OM'; O_1M; O_1M' seien A, B; A', B'; A_1, B_1; A_1', B_1', die Strahlen der Fläche, welche durch einen Scheitelpunkt gehen, stehen in diesem auf der durchlaufenden Achse senkrecht, schneiden daher die absolutpolare Achse in deren Scheitelpunkten. Es sind also A_1A', $A_1'B$, B_1B', $B_1'A$ Strahlen der einen, A_1B', $A_1'A$, B_1A', $B_1'B$ Strahlen der anderen Schar. Daraus ergibt sich eine Relation zwischen den Halbachsen der Fläche. (Fig. 13.)

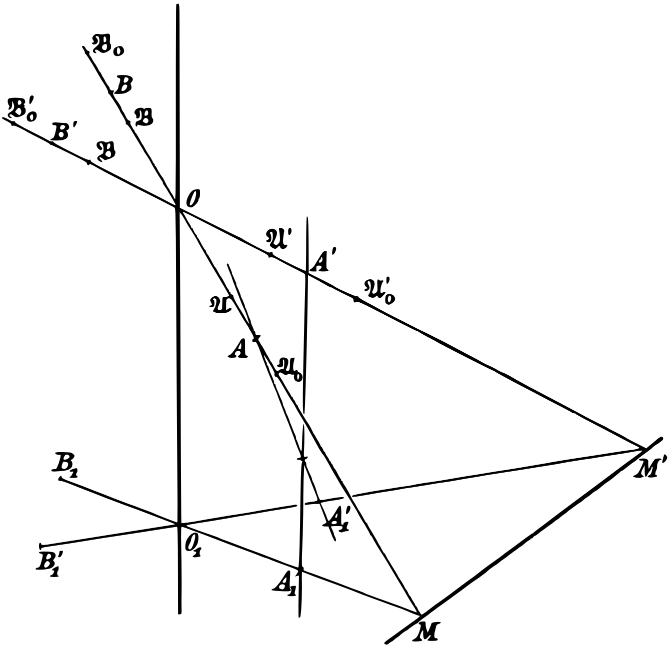

Fig. 12.

AA_1' und $A'A_1$ liegen als Strahlen verschiedener Scharen in einer Ebene. Diese Ebene schneide die Achse OO_1 in S. Dann folgt aus den rechtwinkligen Dreiecken:

$$SO_1A_1' \cdots \operatorname{tg} O_1SA_1' = \frac{\operatorname{tg} O_1A_1'}{\sin SO_1};$$

$$SOA' \cdots \operatorname{tg} OSA' = \frac{\operatorname{tg} OA'}{\sin SO};$$

$$SO_1A_1 \cdots \operatorname{tg} O_1SA_1 = \frac{\operatorname{tg} O_1A_1}{\sin SO_1};$$

$$SOA \cdots \operatorname{tg} OSA = \frac{\operatorname{tg} OA}{\sin SO}.$$

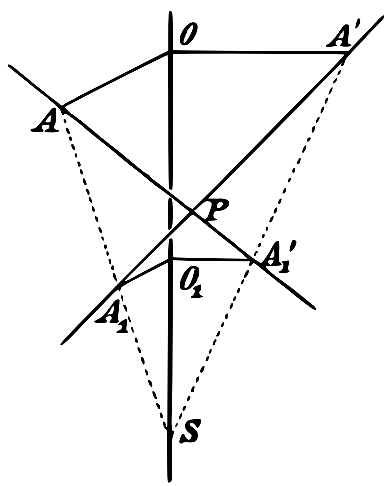

Fig. 13.

Es ist aber

$$\sphericalangle O_1SA_1' = \sphericalangle OSA'$$

und

$$\sphericalangle O_1 S A_1 = \sphericalangle O S A;$$

also

$$\text{I.} \qquad \frac{\operatorname{tg} O_1 A_1}{\operatorname{tg} O_1 A_1'} = \frac{\operatorname{tg} O A}{\operatorname{tg} O A'};$$

oder wenn ich die Länge der Halbachsen mit kleinen Buchstaben bezeichne

$$OA = a, \quad OA' = a', \quad O_1 A_1 = a_1, \quad O_1 A_1' = a_1' :$$

$$\frac{\operatorname{tg} a_1}{\operatorname{tg} a_1'} = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} a'}.$$

Die Tangenten der Halbachsen der in den Hauptebenen ω und ω_1 liegenden Kegelschnitte haben gleiches Verhältnis.

Aus der Produktform:

$$\text{I}'. \qquad \operatorname{tg} O_1 A_1 \cdot \operatorname{tg} O A' = \operatorname{tg} O A \cdot \operatorname{tg} O_1 A_1'$$

folgt:

Die vier Scheitelstrahlen jeder Schar haben gegen die Achse OO_1 (und ebenso gegen jede) gleichen Parameter; der Parameterwert für beide Scharen unterscheidet sich nur durch das Vorzeichen.

Ist umgekehrt O, O_1, M, M' ein absolutes Polartetraeder, liegen in den Ebenen ω und ω_1 zwei Kegelschnitte, deren Scheitel A, B, A', B' bzw. A_1, B_1, A_1', B_1' auf den Kanten des Tetraeders liegen, so ist das Bestehen der Relation I. hinreichende Bedingung dafür, daß sie die Hauptkegelschnitte einer gescharten Fläche zweiter Ordnung sind. Aus I kann ich nämlich direkt schließen, daß die Geraden AA_1 und $A'A_1'$ die Achse OO_1 in demselben Punkte S schneiden, daß also die Geraden AA_1 und $A'A_1'$ in einer Ebene liegen. Ebenso folgt weiter, daß jede der vier Scheitelverbindungsgeraden A_1A', $A_1'B$, B_1B', $B_1'A$ jede der vier anderen A_1B', $A_1'A$, B_1A', $B_1'B$ schneidet, was zum Beweise genügt.

24. Parallelkegel. Ziehe ich durch einen beliebigen Punkt P die Parallelen bestimmter Windung, z. B. der rechten, zu den Strahlen einer Regelschar, so bilden sie einen Kegel zweiten Grades. Ich beweise, daß in jedem Strahlenbüschel durch P zwei Strahlen des Ortes liegen. Ein solches Strahlenbüschel bestimmt nämlich nach Nr. 17 einen linearen Komplex von

Strahlen, die zu den seinen rechtsparallel sind. Der lineare Komplex hat mit der Regelschar zwei Strahlen gemein — der Fall, daß er sie ganz enthält, wird später besprochen — und also hat auch das Strahlenbüschel mit dem Kegel zwei Strahlen gemein. *Zu den beiden Regelscharen einer gescharten Fläche zweiter Ordnung gibt es durch einen beliebigen Punkt im ganzen vier Parallelkegel.*

Wähle ich aber einen Mittelpunkt O_1 der Fläche, so gilt: Durch Spiegelung an O_1 geht eine Gerade g der einen Schar in eine l der anderen über. Dann gibt es aber nach Nr. 11 durch O_1 eine Gerade p, die zu g rechts-, zu l linksparallel ist, und eine p_0, die zu g links-, zu l rechtsparallel verläuft. Von den vier Kegeln fallen also je zwei zusammen. *Durch einen Mittelpunkt O_1 der Fläche gibt es nur zwei Parallelkegel (p) und (p_0)*; (p) ist rechter Parallelkegel für die g-Schar, linker für die l-Schar, (p_0) ist linker Parallelkegel für die g-Schar, rechter für die l-Schar. Durch Umwendung um eine durch O_1 gehende Achse der Fläche geht jede der beiden Scharen, also auch jeder der beiden Kegel in sich selbst über. Daraus folgt: *Die Parallelkegel durch einen Mittelpunkt haben die Achsen der Fläche selbst zu Achsen.*

Die Parallelen durch O_1 zu dem Strahle AA'_1 finde ich nach der in Nr. 12 angegebenen Konstruktion, indem ich die Strecke $a'_1 = O_1A'_1$ auf der Geraden OA von A aus nach beiden Seiten hin abtrage, bis $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_0$, und diese Punkte mit O_1 verbinde. $O_1\mathfrak{A}$ ist ein Scheitelstrahl des Kegels (p), $O_1\mathfrak{A}_0$ ein solcher des Kegels (p_0); die anderen werden in analoger Weise erhalten. Nenne ich die Halbachsen des von (p) in ω eingeschnittenen Kegelschnitts: $O\mathfrak{A} = O\mathfrak{B} = \mathfrak{a}$, $O\mathfrak{A}' = O\mathfrak{B}' = \mathfrak{a}'$; diejenigen des von (p_0) eingeschnittenen $O\mathfrak{A}_0 = O\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{a}_0$, $O\mathfrak{A}'_0 = O\mathfrak{B}'_0 = \mathfrak{a}'_0$ — so ist die eben gegebene Konstruktion ausgedrückt durch:

$$\text{II.} \qquad \begin{cases} \mathfrak{a} \;\; = a - a'_1, & \mathfrak{a}' = a' - a_1; \\ \mathfrak{a}_0 = a + a'_1, & \mathfrak{a}'_0 = a' + a_1, \end{cases}$$

oder aufgelöst nach den a:

$$\text{II}'. \qquad \begin{cases} a \;\; = \frac{1}{2}(\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}\,), & a' \; = \frac{1}{2}(\mathfrak{a}'_0 + \mathfrak{a}'); \\ a_1 = \frac{1}{2}(\mathfrak{a}'_0 - \mathfrak{a}'), & a'_1 = \frac{1}{2}(\mathfrak{a}_0 - \mathfrak{a}). \end{cases}$$

Die Relation I gibt auch eine Beziehung zwischen den a:

$$\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} a_1' = \frac{\sin\frac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{a}_0)\cdot\sin\frac{1}{2}(\mathfrak{a}_0-\mathfrak{a})}{\cos\frac{1}{2}(\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a})\cdot\cos\frac{1}{2}(\mathfrak{a}_0-\mathfrak{a})} = -\frac{\cos\mathfrak{a}_0-\cos\mathfrak{a}}{\cos\mathfrak{a}_0+\cos\mathfrak{a}}$$

$$\frac{\cos\mathfrak{a}_0-\cos\mathfrak{a}}{\cos\mathfrak{a}_0+\cos\mathfrak{a}} = \frac{\cos\mathfrak{a}_0'-\cos\mathfrak{a}'}{\cos\mathfrak{a}_0'+\cos\mathfrak{a}'}$$

III. $$\frac{\cos\mathfrak{a}_0}{\cos\mathfrak{a}} = \frac{\cos\mathfrak{a}_0'}{\cos\mathfrak{a}'}$$

Fassen wir zusammen:

Der Parallelkegel oder Asymptotenkegel durch den Mittelpunkt eines Hyperboloids des Euklidischen Raumes spaltet sich in der elliptischen Geometrie in zwei Kegel (p) *und* (p_0). *Die Strahlen von* (p) *sind zu den Strahlen der* g*-Schar rechts-, zu denen der* l*-Schar linksparallel, diejenigen von* (p_0) *umgekehrt zu den Strahlen der* g*-Schar links-, zu denen der* l*-Schar rechtsparallel. Die Kegel haben die von der Spitze ausgehenden Achsen der Fläche selbst zu Achsen. Die Kosinus der Halbachsen der von ihnen in die absolute Polarebene der Spitze eingeschnittenen Kegelschnitte, oder, was dasselbe ist, die Kosinus ihrer halben Öffnungswinkel stehen in demselben Verhältnis.*

25. Konstruktion der Fläche aus den Parallelkegeln. Zwei beliebige koaxiale Kegel sind daher nicht Parallelkegel einer gescharten Fläche zweiter Ordnung. Die Bedingung III aber ist eine hinreichende Bedingung dafür. II$'$ liefert eindeutig die Halbachsenpaare aa', a_1a_1' zweier Kegelschnitte. Lege ich den ersten in die Ebene ω, den zweiten in die Ebene ω_1, so folgt für diese beiden Kegelschnitte durch Rückrechnung von III her die Bedingung I, d. h. sie sind Hauptkegelschnitte einer gescharten Fläche zweiter Ordnung; daß sie die gegebenen Kegel zu Parallelkegeln hat, lehrt die umgekehrte Betrachtung.

Aber auch wenn ich den zweiten Kegelschnitt in ω, den ersten in ω_1 lege — natürlich immer so, daß die Halbachsen a, a_1 immer auf den nach M, die a', a_1' auf den nach M' gehenden Tetraederkanten liegen — erhalte ich eine Fläche der gewünschten Art. Es folgt:

Zwei konzentrische und koaxiale Kegel, für welche die Kosinus der Halbachsen der von ihnen in die absolute Polarebene der gemeinsamen Spitze eingeschnittenen Kegelschnitte, d. h. die Kosinus der halben Öffnungswinkel in demselben Verhältnis stehen, sind Parallelkegel für zwei bestimmte gescharte Flächen zweiter Ordnung, welche die gemeinsame Spitze der Kegel zum Mittelpunkt, ihre gemeinsamen Achsen selbst zu Achsen haben.

Die beiden Parallelkegel können nicht zusammenfallen, ohne daß die Fläche zweiter Ordnung ausartet. Die Bedingung III wäre zwar erfüllt, aber II′ lehrt, daß die gescharte Fläche mit dem gegebenen Kegel identisch wird.

Wir können nun den Kegeln alle mit III vereinbaren Gestalten geben und haben damit ein Mittel, die gescharten Flächen zweiter Ordnung unter dem Gesichtspunkt der Parallelentheorie zu untersuchen:

26. Die Cliffordsche Fläche. Ist einer der beiden Kegel *rotatorisch*, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$, so ist es der andere auch $\frac{\cos \mathfrak{a}}{\cos \mathfrak{a}'} = \frac{\cos \mathfrak{a}_0}{\cos \mathfrak{a}'_0} = 1$. Die Hauptkegelschnitte der zugehörigen Flächen (ω) und (ω_1) werden Kreise; die Involution von Ebenen durch OO_1, die bezüglich der Fläche konjugiert sind, wird mit der absoluten identisch; das Haupttetraeder wird unbestimmt unter allen absoluten Polartetraedern, welche O und O_1 zu Ecken haben. *Die Regelscharen sind rotatorisch*, sie gestatten alle Drehungen um OO_1, alle Schiebungen längs MM'.

Insbesondere kann der eine Kegel zur Achse OO_1 zusammenschrumpfen, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' = 0$, während der andere ein beliebiger Rotationskegel um diese Achse bleibt. In diesem Falle werden die Kegelschnitte (ω) und (ω_1) gleich große Kreise, es gibt nur eine Fläche, welche die gegebenen Kegel zu Parallelkegeln hat. Diese trägt eine Schar von Strahlen, die zur Achse sämtlich rechtsparallel sind, und eine, deren Strahlen zur Achse linksparallel laufen. Sie heißt *Cliffordsche Fläche.*

Jede Parallele zur Achse hat an allen Punkten denselben Abstand von der Fläche. Je zwei Strahlen verschiedener Scharen haben einen Punkt gemein. Darum hat die ganze Fläche allenthalben konstanten Abstand von der Achse OO_1 und dann natürlich auch von ihrer absoluten Polaren MM'. *Sie trägt also zwei Scharen von Kreisen mit konstantem Radius*, die Ebenen der einen Schar stehen auf OO_1 senkrecht, gehen also durch MM', die der anderen Schar stehen auf MM' senkrecht, gehen also durch OO_1.

Die Cliffordsche Fläche gestattet daher sowohl alle Drehungen um die Achse OO_1, wie um die Achse MM', d. h. *alle Schraubungen um diese Achsen.* Läßt eine Fläche ∞^2 Bewegungen in sich zu, so gestattet sie nach einem bekannten Satze von v. Mangoldt[1]) deren ∞^3. Aus der Existenz der zweigliedrigen Untergruppe der Schraubungen ist dann zu schließen, daß die dreigliedrige Gruppe mit der Gruppe der Euklidischen Bewegun-

1) H. v. Mangoldt, Über die Klassifikation der Flächen nach der Verschiebbarkeit ihrer geodätischen Dreiecke. Crelles J. Bd. 94. p. 21.

gen identisch ist, daß also *auf der Cliffordschen Fläche die Euklidische Geometrie herrscht.* [1])

Das absolute Polartetraeder, von dem wir ausgingen, hat seine Sonderstellung verloren: Alle absoluten Polartetraeder, die nur ein Paar von Gegenkanten auf den Geraden OO_1, MM' liegen haben, sind zugleich Polartetraeder der Fläche, die Involutionen konjugierter Punkte und Ebenen auf und um diese Achsen sind mit den absoluten identisch.

27. Projektive Erzeugung. Projektivisch kann ich Cliffordsche Regelscharen immer, wie folgt, erzeugen: a, b seien zwei Parallele, ihre Punktreihen setze ich in eine *projektivisch gleiche Beziehung*, nur so, daß durch die Projektivität parallele Richtungen (Nr. 13) entsprechend werden. Der Ort der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte ist eine Regelschar, deren Strahlen unter einander in der zu a, b entgegengesetzten Windung parallel sind, weil sie zu je zweien mit a und b zusammen ein windschiefes Parallelogramm erster Art bilden (vgl. Nr. 14).

Ein solcher Ort ist z. B. die Schar der gemeinsamen Lote von a und b.

Enthält andrerseits eine Regelschar drei untereinander parallele Geraden, so liegt sie ganz in dem Parallelennetz, das diese bestimmen. Folglich schrumpft der eine Parallelkegel in eine einzige Gerade zusammen, alle Strahlen der Leitschar sind zu dieser in der anderen Windung parallel, also auch untereinander: *Eine Fläche zweiter Ordnung durch drei parallele Strahlen ist eine Cliffordsche Fläche.*

Ihre beiden Rotationsachsen sind leicht zu konstruieren als die beiden gemeinsamen Strahlen der ungleich gewundenen Parallelennetze, denen die beiden Scharen bzgl. angehören (vgl. Nr. 11 und 12).

Die Cliffordsche Fläche trägt ∞^4 Parallelogramme der ersten Art. *Der Winkel, den zwei Strahlen der einen und der anderen Schar mit einander bilden, ist auf der ganzen Fläche konstant*, nämlich gleich dem halben Öffnungswinkel des nicht in die Achse gefallenen rotatorischen Parallelkegels. Das folgt einfach aus dem Satze, nach welchem Winkel mit gleichgewundenen parallelen Schenkeln gleich sind (vgl. Nr. 17).

Dieser konstante Winkel kann nun auch ein rechter werden. Dann ist der halbe Öffnungswinkel des Parallelkegels auch ein rechter, er geht also in das Strahlenbüschel (O_1, ω_1) über. Wenn jeder Strahl der einen Schar auf jedem der anderen senkrecht steht, so muß zu jedem Strahl der absolut polare in derselben Schar enthalten sein. In jeder Schar liegt also eine Involution

1) F. Klein, Math. Ann. 37, p. 553.

absolutpolarer Strahlen. Wir wollen diese Fläche *orthogonale Cliffordsche Fläche* nennen, ihre Scharen auch orthogonale Cliffordsche Scharen. Die Schar der gemeinsamen Lote zweier Parallelen ist eine solche.

28. Ausgeartete Parallelkegel. *Der eine Kegel kann* aber auch *in das Strahlenbüschel* (O_1, ω_1) *übergehen*, ohne daß der andere in die Achse fällt; ja da für den ersten $\dfrac{\cos \mathfrak{a}}{\cos \mathfrak{a}'} = \dfrac{0}{0}$ ist, so ist der zweite noch ganz willkürlich. Durchläuft der Kegelstrahl das ganze Strahlenbüschel, so kommt er in jede Lage zweimal. In jeder Schar sind also immer zwei Strahlen zu demselben Strahl des Büschels rechts- bzw. linksparallel. *In der einen Schar liegt eine Involution unter einander rechtsparalleler, in der anderen eine Involution unter einander linksparalleler Strahlen.*

Die beiden Scharen sind bezüglich in den beiden ausgezeichneten linearen Komplexen enthalten, welche aus den rechten bzw. linken Parallelen zu den Strahlen des Strahlenbüschels (O_1, ω_1) bestehen (vgl. Nr. 17).

Noch in anderer Weise kann ein Parallelkegel in ein Strahlenbüschel übergehen: Setze ich z. B. $\mathfrak{a} = 0$, und gebe $\mathfrak{a}'$ einen beliebigen festen Wert, so ist der Kegel das doppelt durchlaufene Strahlenbüschel um den Punkt O_1 in der Ebene OO_1M', aber begrenzt durch die Strahlen, welche gegen O_1O den Winkel $\mathfrak{a}'$ bilden. Der zweite Kegel ist noch willkürlich, nur muß er $\dfrac{\cos \mathfrak{a}_0}{\cos \mathfrak{a}_0'} = \dfrac{1}{\cos \mathfrak{a}'}$ befriedigen. Auch hier trägt die eine Regelschar eine Involution rechts-, die andere eine Involution linksparalleler Strahlen. Schon daraus, daß in diesem zweiten Falle in dem parallelen Strahlenbüschel extreme Strahlen auftreten, im ersten aber nicht, kann man schließen, daß bei dem zweiten Typus beide Involutionen hyperbolisch, bei dem ersten beide elliptisch sind; doch wollen wir dies näher untersuchen.

29. Zwei Typen von hyperbolischen Paraboloiden. Zunächst beweise ich:

Wenn eine Regelschar zwei rechtsparallele Geraden g, g' enthält, so trägt sie eine Involution rechtsparalleler Geraden, und die Leitschar eine solche linksparalleler Geraden.

Die Leitschar kann ich mir entstanden denken durch die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier projektiven Punktreihen auf den Geraden g, g'. In zwei projektiven Punktreihen gehen von jedem Paar entsprechender Punkte zwei Paare entsprechender gleicher Strecken aus [1]);

---

1) Steiner-Schröter-Sturm, Theorie der Kegelschnitte, Leipzig 1898, p. 38. Für die Punktreihe der elliptischen Geometrie folgert man den Satz aus der entsprechenden

aber nur in dem einen Paar sind wirklich die gleichen Strecken entsprechend, in dem anderen zwei Strecken, die sich zu π ergänzen. Sind nun die beiden Punktreihen gleichlaufend projektiv, d. h. entspricht einer festgelegten positiven Richtung auf g, die vermöge der Festsetzungen von Nr. 4 bestimmte positive Richtung auf g', so bestimmt jedes Paar der ersten Art ein windschiefes Parallelogramm, dessen linksparallele Gegenseiten zur auf g, g' gestützten Regelschar gehören, im anderen Falle liefert jedes Paar der zweiten Art ein solches Parallelogramm. Sind g, g' linksparallel, so gilt das Umgekehrte. Damit ist die zweite Hälfte des ausgesprochenen Satzes bewiesen; die erste folgt gerade so, wenn ich jetzt von zwei linksparallelen Geraden der auf g und g' gestützten Regelschar ausgehe.

Die Involutionen rechts- und linksparalleler Geraden schneiden einen Hauptkegelschnitt, z. B. (ω_1), in je einer Punktinvolution. Bei einer Spiegelung an der Ebene ω_1 geht die Involution rechtsparalleler Geraden der einen Schar in die linksparalleler Geraden der anderen über; der Kegelschnitt (ω_1) bleibt aber punktweis in Ruhe. *Darum schneiden die beiden Parallelinvolutionen in einen Hauptkegelschnitt dieselbe Punktinvolution ein.* Durch Umwendung um eine Achse der Fläche geht jede Parallelinvolution, also auch die Punktinvolution auf (ω_1), in sich selbst über. Darum muß das Zentrum der auf (ω_1) liegenden Punktinvolution einer der Mittelpunkte O_1, M, M' sein. Ist es O_1, so sind die Punktinvolution und folglich auch beide Parallelinvolutionen elliptisch, ist es M oder M', so sind sie hyperbolisch. Nun überzeugt man sich unschwer, daß, wenn das parallele Strahlenbüschel in ω_1 liegt, der erste Fall eintritt — O_1 ist Zentrum —, während, wenn das Strahlenbüschel in die Ebene O_1OM' fällt, der zweite Fall statt hat — M' ist Zentrum —, und daß die äußersten Begrenzungsstrahlen dieses Strahlenbüschels die Parallelen zu den Doppelelementen in beiden Parallelinvolutionen abgeben; die Doppelelemente selbst sind die von A und B ausgehenden Scheitelstrahlen.

Durch die Eigenschaft, daß ihre sämtlichen Strahlen zu den Strahlen eines Strahlenbüschels parallel sind, treten diese Flächen in Verwandtschaft mit den *hyperbolischen Paraboloiden* des Euklidischen Raumes. Wir wollen auch diesen Namen zur kurzen Bezeichnung anwenden.

30. Das gleichseitige hyperbolische Paraboloid. Es können auch beide Parallelkegel durch O_1 gleichzeitig in Strahlenbüschel ausarten. Sei wieder $\mathfrak{a} = 0$ und $\mathfrak{a}'$ von festem beliebigen Werte; nur $\mathfrak{a}' = 0$ und $\mathfrak{a}' = \frac{\pi}{2}$

Eigenschaft der projektivischen Strahlenbüschel.

schließe ich aus, weil das erste die Cliffordsche Fläche und das zweite die Ausartung der Fläche in ein Strahlenbüschel bewirkt. Dann muß nach III $\frac{\cos \mathfrak{a}_0}{\cos \mathfrak{a}_0'} = \frac{1}{\cos \mathfrak{a}'}$ sein. Ist auch $\mathfrak{a}_0 = 0$, so sind beide Kegel in das Strahlenbüschel in der Ebene O_1OM' zusammengefallen mit dem gemeinsamen Öffnungswinkel $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_0'$; die Fläche zweiter Ordnung artet in dasselbe Büschel aus. $\mathfrak{a}_0'$ kann nicht null werden; daß also das zweite Strahlenbüschel in die andere Hauptebene durch OO_1 fällt, ist nicht möglich. Als einzige Möglichkeit bleibt $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0' = \frac{\pi}{2}$, d. h. das zweite Strahlenbüschel fällt in die Ebene ω_1. *Es gibt Flächen zweiter Ordnung, auf welchen jede Schar eine Involution rechts- und eine Involution linksparalleler Strahlen trägt. In jeder Schar ist dann stets die eine Involution elliptisch, die andere hyperbolisch.* Ist in der einen Schar die Involution rechtsparalleler Strahlen elliptisch, so ist es in der anderen diejenige der linksparallelen.

Die elliptische und die hyperbolische Involution in einer Schar haben bekanntlich stets ein reelles Paar gemein. Die Strahlen dieses Paares sind zueinander zugleich rechts- und linksparallel, also absolutpolar. *In jeder Schar liegt ein Paar absolutpolarer Geraden.*

Diese merkwürdige Fläche trägt ∞^2 Parallelogramme erster Art, ebensoviele zweiter Art und ein in sich absolutpolares windschiefes Vierseit. Sie tritt vermöge dieser letzten Eigenschaft in der elliptischen Geometrie durchaus an die Stelle des Euklidischen *gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids*; wir wollen sie auch so nennen.

Enthält eine Regelschar ein Paar absolutpolarer Geraden, so liegt sie auf einem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid.

Die Leitschar vermittelt auf den absolutpolaren Geraden eine Projektivität. Diesmal liefern beide Systeme entsprechend gleicher Strecken Rechtecke, weil zwei absolutpolare Geraden sowohl rechts- als linksparallel sind. Die Leitschar trägt also sowohl eine Involution rechts-, wie eine solche linksparalleler Strahlen. Danach gilt dasselbe auch von der Regelschar.

31. Der Parameter des gleichseitigen Paraboloids. Es gilt der Satz: *Der Parameter aller Strahlen einer Schar eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides bezüglich der beiden Diagonalen des auf ihm liegenden absolutpolaren Vierseits ist konstant; für die zweite Schar hat der Parameter denselben Wert mit entgegengesetztem Vorzeichen.*

P,Q, R,S sei das auf der Fläche liegende absolutpolare Vierseit. (Fig. 14.) $PQ = a$, $RS = a'$ und $QR = b$, $SP = b'$ sind Paare absolutpolarer Geraden. Orientiere ich a und a' durch zwei rechte perspektive

Windungen und bestimme jeden Punkt X von a durch den Tangens seines Abstandes von P genommen in der Richtung PX, desgleichen jeden Punkt X' von a' durch den Tangens seines Abstandes von R genommen in der Richtung $X'R$, so kann ich, wenn ich diese Koordinaten noch bzw. mit λ und λ' bezeichne, die Projektivität, welche die auf a, a' gestützte Schar auf diesen Geraden hervorruft ausdrücken durch die bilineare Relation $\lambda\lambda' + p\lambda + q\lambda' + r = 0$. Weil aber P, S und Q, R entsprechende Elemente sind, so vereinfacht sie sich zu $\lambda\lambda' = r$, $\operatorname{tg} PX \cdot \operatorname{tg} X'R = r$.

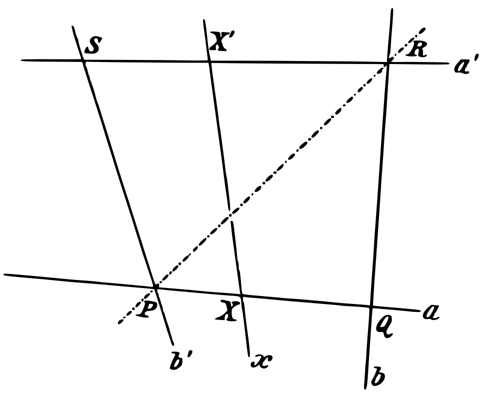

Fig. 14.

Das ist gerade der Parameter des die Punkte XX' verbindenden Regelstrahles gegen die Diagonale PR des Vierseits.

Die Diagonalen PR und QS sind zugleich bezüglich der Fläche und des absoluten Polarraumes polar; sie sind also Achsen der Fläche. Daß der Parameter der anderen Schar sich nur durch das Vorzeichen unterscheidet, folgt aus dem Umstand, daß die beiden Scharen durch Spiegelung an den durch die Achse PR gehenden Hauptebenen der Fläche ineinander übergehen. Wir schließen daraus zugleich: *Alle Geraden einer Schar eines gleichseitig hyperbolischen Paraboloids haben gegen das Paar absolutpolarer Geraden der Schar dieselbe Windung.*

Ist wieder XX' eine beliebige Gerade der Schar und sei sie gegen PS rechtsgewunden. Dann sind in der Projektivität zwischen a und a' die Strecken PX, SX' und QX, RX' entsprechend. Jeder Strahl der Schar, der auf diesen Strecken von a und a' fußt, ist gegen XX' rechtsgewunden. Darum kann die linke Parallele zu XX' diesen Teilen der Regelschar nicht angehören, sie muß vielmehr von XX' durch PS und QR getrennt werden. Wenn aber zwei Paare der Involution linksparalleler Strahlen sich trennen, so ist die Involution elliptisch; alsdann ist die Involution rechtsparalleler Strahlen hyperbolisch, und wir haben:

In einer Regelschar eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids, deren Strahlen gegen das Paar absolutpolarer Geraden rechtsgewunden sind, ist die Involution rechtsparalleler Strahlen die hyperbolische, diejenige linksparalleler Strahlen die elliptische.

§ 2. Der lineare Komplex.

32. Die Achsen des linearen Komplexes. Wir wenden uns zur Untersuchung des linearen Komplexes. Seine projektiven Eigenschaften setzen wir dabei als bekannt voraus.[1]) Eine auf Chasles[2]) zurückgehende Erzeugungsweise ist z. B. die folgende: Ich lege in einer Regelschar eine Involution fest und suche den Ort der Strahlen, die solche Geraden der Regelschar schneiden, welche ein Paar der Involution bilden. Wir werden aus der Eigenschaft: Durch jeden Punkt geht ein Büschel von Komplexstrahlen, in jeder Ebene liegt ein solches, die in der Euklidischen Geometrie wohl bekannten Verhältnisse der Achse, der Windung, der Durchmesser des Komplexes nachweisen und schließlich einen besonderen linearen Komplex finden, der ∞^4 Bewegungen in sich zuläßt, ein Typus, der in der Euklidischen Geometrie nur in dem ausgearteten Komplex auftritt, dessen Strahlen sämtlich zu einer Ebene parallel sind.

Ordne ich jedem Punkte des Raumes die Ebene des Büschels von Komplexstrahlen zu, das ihn selbst zum Scheitel hat, so entsteht eine involutorische Korrelation, ein *Nullsystem.* Mit Rücksicht auf dieses mit dem Komplex verbundene Nullsystem nenne ich die Strahlen des Komplexes auch *Nullstrahlen.* Wie ich zwei Strahlen, die in dem absoluten Polarraum entsprechend sind, absolutpolar nannte, so will ich zum Unterschied zwei Strahlen, die in dem Nullsystem einander entsprechen, *nullpolar* nennen. Die Nullstrahlen sind zu sich selbst nullpolar.

Bilde ich einen linearen Komplex G durch den absoluten Polarraum ab, so geht er in einen linearen Komplex G_1 über, seinen absolutpolaren. G und G_1 haben, wenn sie nicht zusammenfallen — worüber später —, ein Strahlennetz gemein. Die Leitgeraden des Netzes sind sowohl bezüglich G wie bezüglich G_1 nullpolar, und obendrein, weil das Netz durch die absolute Polarität in sich selbst übergeht, zueinander absolutpolar. Ein elliptischer Polarraum hat nur reelle Paare polarer Geraden; daraus schließe ich[3]):

Ein linearer Komplex besitzt ein stets reelles Paar nullpolarer Geraden a, a', welche zugleich absolutpolar sind; wir nennen sie Achsen des linearen Komplexes.

---

1) Sturm, a. a. O., I. p. 62–110. Literatur über den linearen Komplex in der nicht Euklidischen Geometrie, s. p. 175, Anmerkung.

2) Sturm, a. a. O., I. p. 102.

3) D'Ovidio, Teoremi sui complessi lineari nella metrica projettiva, Rend. dell' Istituto Lombardo II_{14}, p. 405. — Lindemann, Über unendlich kleine Bewegungen usw., Math. Ann. 7, § 1.

Jeder Nullstrahl, der eine Achse schneidet, schneidet auch die andere und schneidet folglich beide rechtwinklig. Die Nullebene irgend eines Punktes einer der beiden Achsen steht auf ihr senkrecht, weil sie die andere absolutpolare Achse enthält.

Sind b, b' irgend zwei nullpolare Geraden, so sind ihre beiden gemeinsamen Lote Nullstrahlen und zueinander absolutpolar. Darum gehören sie sowohl dem G wie dem G_1 an, d. h. sie gehören zu dem Netze (a, a'). *Die gemeinsamen Lote je zweier nullpolaren Geraden treffen die beiden Achsen.* Die gemeinsamen Lote einer beliebigen Geraden b und einer Achse, sind zugleich gemeinsame Lote für b und ihre Nullpolare b'.

33. Durchmesser des Komplexes. Ist d eine Parallele zur Achse a, gleichgültig welcher Windung, so hat sie mit a und a' eine ganze Regelschar von gemeinsamen Loten, diese müssen sämtlich auch die nullpolare Gerade senkrecht treffen, d. h. d' liegt in der Cliffordschen Leitschar, ist also zu d und a in derselben Windung parallel wie diese untereinander. *Die beiden zu den Achsen gehörigen Parallelennetze bestehen aus Paaren nullpolarer Geraden; ich will sie Durchmessernetze nennen*, denn sie treten durchaus an die Stelle des Durchmesser-Parallelbündels in der Euklidischen Geometrie.

Umgekehrt gilt: *Wenn zwei nullpolare Geraden parallel sind, so liegen sie in dem Durchmessernetz gleicher Windung.* Denn die Cliffordsche Schar ihrer gemeinsamen Lote stützt sich auf beide Achsen.

Die Nullebenen aller Punkte eines Durchmessers gehen durch den nullpolaren. Da aber die Ebenen durch eine von zwei Parallelen mit der anderen einen konstanten Winkel bilden (vgl. Nr. 12), so folgt: *Die Nullebenen aller Punkte eines Durchmessers bilden mit diesem ein und denselben Winkel; auch der Winkel mit der Achse ist konstant, aber von dem ersten verschieden.*

34. Der Parameter und die Windung. h sei ein Nullstrahl des Netzes (a, a'), h_1 sein absolutpolarer. Läuft ein Punkt C auf h, so dreht sich seine Nullebene um h und schneidet in h_1 eine zu der Punktreihe von h projektive Punktreihe ein. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte sind Nullstrahlen und erfüllen eine Regelschar eines gleichseitigen Paraboloides, weil sie sich auf zwei absolutpolare Geraden stützt. g sei ein solcher Nullstrahl; h schneidet a und g in A und C, h_1 schneidet dieselben in A_1 und C_1; dann ist nach Nr. 31 für alle Strahlen des Paraboloids $\operatorname{tg} AC \cdot \operatorname{tg} C_1A_1 = p$ konstant. Alle Nullstrahlen also, welche dieselben gemeinsamen Lote mit den Achsen haben, haben auch denselben Parameter gegen die Achsen.

d sei jetzt irgend ein Durchmesser, d' sein nullpolarer. Läuft Punkt D auf d, so dreht sich seine Nullebene δ um d' und bildet mit a immerwährend einen konstanten Winkel. Ist h das Lot von D auf a, Fußpunkt A, h_1 seine absolute Polare mit den Stützpunkten A_1 und D_1 auf a und d, so wird dieser konstante Winkel gemessen durch die Strecke $A_1\mathfrak{D}_1$, wenn $\mathfrak{D}_1$ der Schnittpunkt von δ mit h_1 ist. $D\mathfrak{D}_1$ ist ein Nullstrahl und zwar derjenige durch D, der auf dem Lote h senkrecht steht. AD und $A_1\mathfrak{D}_1$ sind für alle Punkte von d konstant also auch: $\operatorname{tg} AD \cdot \operatorname{tg} \mathfrak{D}_1 A_1$. Auch für alle Strahlen des Komplexes, welche sich auf einen Durchmesser d stützen und zugleich auf dem von dem Stützpunkt aus auf a gefällten Lote senkrecht stehen, ist der Parameter gegen die Achse derselbe.

Nunmehr seien g, g' zwei ganz beliebige Nullstrahlen, h, h_1; h', h'_1 ihre gemeinsamen Lote mit a, welche bezüglich a in A, A_1; A', A'_1, g in C, C_1, g' in C', C'_1 schneiden. (Fig. 15.) Ich lege durch C den Durchmesser d_r des rechtsgewundenen Netzes, durch C' den d_l des linksgewundenen Netzes. Die Regelschar a, d_l, d_r ist ein gleichseitiges Paraboloid, weil sie schon ein Paar rechts- und ein Paar linksparalleler Geraden besitzt a, d_r und a, d_l. Darum enthält die Leitschar ein Paar absolutpolarer Geraden k, k_1, die stets reell sind; sie sind gemeinsame Lote von a, d_r, d_l. Lege ich dann durch die Punkte $(kd_r) = D_r$ und durch $(kd_l) = D_l$ beziehungsweise die Nullstrahlen, welche auf k senkrecht stehen, so liefern die beiden vorausgegangenen Sätze, wenn ich wieder die beiden Abstände zweier windschiefen Geraden, z. B. a, g, mit $[ag]$, $[ga]_1$ bezeichne:

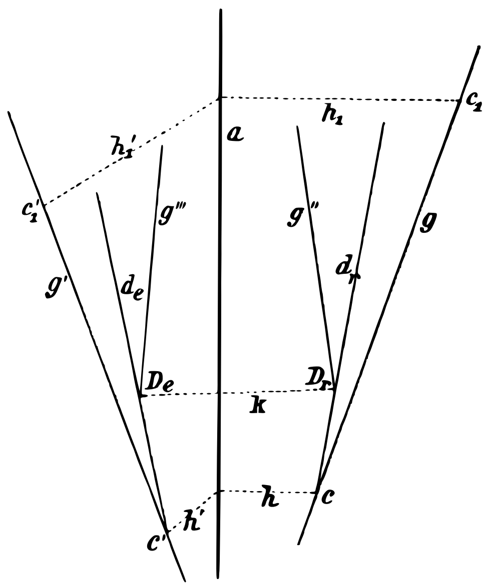

Fig. 15.

I. $$\operatorname{tg}[ag] \cdot \operatorname{tg}[ga]_1 = \operatorname{tg}[ag''] \cdot \operatorname{tg}[ga'']_1 = \operatorname{tg}[ag'''] \cdot \operatorname{tg}[ga''']_1 = \operatorname{tg}[ag'] \cdot \operatorname{tg}[ga']_1 = p.$$

Alle Gleichungen gelten auch dem Vorzeichen nach. Da g, g' zwei ganz beliebige Nullstrahlen waren, so gilt:

Alle Strahlen des linearen Komplexes haben gegen die Achse a denselben Parameter p; wir nennen ihn Parameter des linearen Komplexes. [1]) Der Parameter der Komplexstrahlen gegen die andere Achse ist dann $\frac{1}{p}$.

Umgekehrt gilt: Alle Strahlen, welche gegen eine Gerade a konstanten Parameter haben, erfüllen einen linearen Komplex mit a als Achse.

Jenachdem das Vorzeichen des Parameters positiv oder negativ ist, sind sämtliche Komplexstrahlen gegen die Achse rechts oder links gewunden.

35. Nullpolare Geraden. b ist eine beliebige Gerade, h, h_1 sind ihre gemeinsamen Lote mit a (Fig. 16), A, B; A_1, B_1 deren Fußpunkte. h, h_1 sind Nullstrahlen. Es sei dann c der Nullstrahl durch B, der h_1 trifft in B_1', e derjenige durch B_1, der h trifft in B', dann ist $B'B_1'$ die nullpolare Gerade b' von b. Die Nullstrahlen c, e liefern aber:

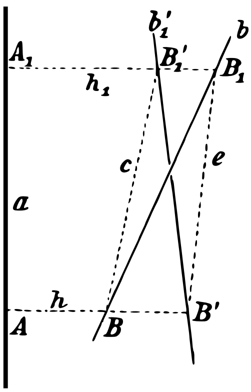

Fig. 16.

$$\operatorname{tg} AB \cdot \operatorname{tg} B_1'A_1 = \operatorname{tg} AB' \cdot \operatorname{tg} B_1A_1 = p.$$

Also für zwei nullpolare Strahlen besteht die Gleichung:

$$\text{II.} \qquad \operatorname{tg}[ab] \cdot \operatorname{tg}[b'a]_1 = \operatorname{tg}[ab'] \cdot \operatorname{tg}[ba]_1 = p,$$

welche zu einem Strahl b seinen nullpolaren eindeutig finden läßt; sie gilt dem Vorzeichen nach, wenn ich die Richtung auf den gemeinsamen Loten festlege in der bekannten Weise.

36. Parallelen im Komplex. Die Gleichung II bestätigt, daß ein Durchmesser wieder in einen Durchmesser desselben Netzes übergeht, denn ist $[ad] = \pm[da]_1$, so ist notwendig auch $[ad'] = \pm[d'a]_1$, welches Vorzeichen auch p haben mag. Sie fügt hinzu: Bei positivem Parameter p werden zwei nullpolare Durchmesser d_r, d_r' des rechtsgewundenen Netzes von a und a' in der alle vier Strahlen enthaltenden orthogonalen Cliffordschen Schar eingeschlossen, zwei nullpolare Strahlen des linksgewundenen Netzes d_l, d_l' werden von a, a' getrennt. Bei negativem Parameter ist es umgekehrt.

Gleichung II stellt in dem Büschel von Cliffordschen Flächen, welche a, a' zu Achsen haben, eine Involution her. Zwei Flächen sind entsprechend, deren Abstände r, r' von a die Bedingung erfüllen $\operatorname{tg} r \cdot \operatorname{tg} r' = |p|$. Die beiden rechtsgewundenen und die beiden linksgewundenen Scharen zweier solchen Flächen gehen nullpolar ineinander über.

1) D'Ovidio, a. a. O., p. 413.

Die Involution hat zwei Doppelelemente, eines ist das Achsenpaar selbst, das andere ist die Fläche mit dem Radius $\operatorname{tg} r = \sqrt{|p|}$. Ist p positiv so sind die Strahlen der rechtsgewundenen Schar zu sich selbst nullpolar, also Komplexstrahlen, während in der linksgewundenen Schar die diametral gegenüberliegenden d. h. die von derselben durch a und a' gehenden orthogonalen Cliffordschen Fläche getragenen Strahlen zueinander nullpolar sind; bei negativem p ist es umgekehrt:

Jenachdem der Komplex sich rechts oder links um die Achsen windet, gibt es eine rechte oder eine linke Durchmesserregelschar, deren Strahlen Nullstrahlen sind; sonst ist kein reeller Durchmesser in dem Komplex enthalten.

Fragen wir nach Cliffordschen Scharen, die im Komplex enthalten sind. g sei ein beliebiger Strahl des Komplexes. Auf g stützt sich eine Regelschar des rechten und eine des linken Durchmessernetzes. Wenn ein Nullstrahl eine von zwei nullpolaren Geraden schneidet, so schneidet er auch die andere. Darum müssen die beiden Durchmesserregelscharen, aus Paaren nullpolarer Geraden bestehen. Dann bestehen aber die Leitscharen, die ebenfalls Cliffordisch sind, aus lauter Nullstrahlen, weil jede Treffgerade zweier nullpolaren Strahlen ein Nullstrahl ist. Daraus folgt:

Jeder Komplexstrahl bestimmt eine ganz im Komplex enthaltene Parallelregelschar rechter und eine linker Windung. Die Leitschar gehört bezüglich dem linken und rechten Durchmessernetz an. Die im Komplex enthaltenen Parallelregelscharen rechter (linker) Windung erfüllen ein lineares System zweiter Stufe.

37. Der Parallelkomplex. Für $p = 0$ ist der lineare Komplex ausgeartet in den Inbegriff der Treffstrahlen der Achse a, für $p = \infty$ in den Inbegriff der Treffstrahlen der Achse a'. *Ein interessanter Fall aber tritt ein für $p = \pm 1$.* Vom Vorzeichen hängt nur die Windung ab; ich behandle $p = +1$.

d_l sei ein Durchmesser linksparallel zur Achse. $[ad_l]$ ist dann gleich $[d_l a]_1$, aber von entgegengesetztem Vorzeichen. Aus der Gleichung $\operatorname{tg}[ad_l] \cdot \operatorname{tg}[d'_l a]_1 = \operatorname{tg}[ad'_l] \cdot \operatorname{tg}[d_l a]_1 = 1$ schließen wir $[d'_l a] = -\left(\frac{\pi}{2} - [ad_l]\right)$, d. h. d_l und d'_l sind Parallele vom Abstand $\frac{\pi}{2}$; sie sind daher absolutpolar. Also nicht bloß das Achsenpaar, von dem wir ausgingen, sondern jedes nullpolare Paar von linksgewundenen Durchmessern ist zugleich absolut polar.

Der lineare Komplex mit dem Parameter $+1$ hat ∞^2 Achsenpaare; diese erfüllen ein linksgewundenes Parallelennetz (für $p = -1$ ein rechtsgewun-

denes).

Wir wollen diese Art linearer Komplexe als *Parallelkomplexe* bezeichnen.

Suchen wir den Parameter des Komplexes bezüglich eines anderen seiner ∞^2 Achsenpaare, so finden wir immer wieder den Wert $+1$ bzw. -1. Alle Achsenpaare sind daher gleichwertig.

Aus der Existenz von ∞^2 Paaren absolutpolarer Geraden, die zugleich nullpolar sind, folgt, daß der Komplex mit seinem absolutpolaren zusammenfällt, daß er also durch den absoluten Polarraum in sich selbst übergeht, und daß umgekehrt der absolute Polarraum von dem Nullsystem eines Parallelkomplexes in sich selbst übergeführt wird.

Ist andrerseits ein linearer Komplex mit seinem absolut polaren identisch, so muß das zugehörige Nullsystem mehr als ein Paar absolut polarer Strahlen zu nullpolaren Strahlen haben, woraus man leicht den Parameterwert ± 1 ableitet. Es gilt daher nicht nur: *Der Parallelkomplex wird von dem absoluten Polarraum in sich selbst übergeführt*, sondern auch: *Jeder lineare Komplex, der von dem absoluten Polarraum in sich selbst übergeführt wird, ist ein Parallelkomplex.*

Mit den ∞^2 Achsenpaaren ist *der Parallelkomplex als Ort der Strahlen erkannt, welche die Strahlen eines Parallelennetzes, des Achsennetzes, senkrecht schneiden.* Wir weisen auch unschwer jeden solchen Ort als linearen Komplex nach. Da nämlich eine Gerade mit allen untereinander parallelen Geraden, welche sich auf sie stützen, gleiche Winkel bildet, so schneidet sie alle Strahlen des Achsennetzes rechtwinklig, wenn sie auf einer senkrecht steht. Die Ortsstrahlen durch einen beliebigen Punkt erfüllen also gerade das Strahlenbüschel, das auf dem durch den Punkt gehenden Strahl des Achsennetzes senkrecht steht.

Ist g ein Strahl des Ortes, g' zu ihm linksparallel, so schneidet g die ihn treffenden Strahlen des Achsennetzes rechtwinklig; weil aber Winkel mit gleichgewunden parallelen Schenkeln gleich sind, so steht g' auch auf allen Strahlen des Achsennetzes senkrecht, die ihn schneiden, gehört also ebenfalls zu dem Ort. Der Ort besteht daher aus den sämtlichen linksgewundenen Parallelen zu den Strahlen eines seiner Strahlenbüschel:

Ein linearer Komplex mit dem Parameter ± 1 wird von ∞^1 links- bzw. rechtsgewundenen Parallelennetzen erfüllt. [1])

Diese Art von linearen Komplexen trat schon in Nr. 17 auf.

---

1) Coolidge a. a. O. p. 21.

Ist b eine beliebige Gerade des Raumes, so stützt sich auf sie von irgendeinem im Komplex enthaltenen Parallelennetz eine linksgewundene Cliffordsche Schar. Die nullpolare Gerade b' muß in der zugehörigen Leitschar enthalten sein, ist also zu b rechtsparallel. *Bei dem Parameter* $+1$ *sind je zwei nullpolare Geraden rechtsparallel.* Jedes rechtsgewundene Parallelennetz ist zu sich selbst nullpolar. Daraus folgt weiter: *Jeder Parallelkomplex mit dem Parameter* $+1$ *ist zu jedem Parallelkomplex mit dem Parameter* -1 *in Involution.*

Enthält ein linearer Komplex ein linksgewundenes Parallelennetz, so ist er ein Parallelkomplex mit ∞^1 *solchen Netzen.* Ich kann nämlich, wie oben, beweisen, daß je zwei nullpolare Strahlen rechtsparallel sind; da aber nach Nr. 33 jedes Paar rechtsparalleler nullpolarer Geraden zu einem Achsenpaar parallel ist, so folgt daraus die Existenz von mehr als einem Achsenpaar, also der Parameterwert $+1$. In einem linearen Komplex, in welchem ein linksparalleles Netz liegt, kann kein rechtsparalleles enthalten sein, weil zwei solche nur ein Paar absolutpolarer Geraden gemein haben, zwei Netze eines Komplexes aber sich in einer Regelschar durchdringen.

38. Bewegungen des Komplexes in sich. Ein gewöhnlicher linearer Komplex geht durch alle Bewegungen in sich selbst über, welche seine beiden Achsen in Ruhe lassen; das leisten genau die ∞^2 Schraubungen um diese Achsen. Es folgt: *Ein gewöhnlicher linearer Komplex läßt* ∞^2 *Bewegungen in sich zu, nämlich die sämtlichen Schraubungen um seine Achsen.*

Zu einem Parallelennetz gehört nur ein eindeutig bestimmter Parallelkomplex, der das Netz zum Achsennetz hat. Darum führt jede Bewegung, die das Achsennetz in sich selbst überführt, auch den zugehörigen Parallelkomplex in sich selbst über. Ein Parallelennetz nun geht bei allen Schraubungen, die zwei seiner Geraden zu Achsen haben, in sich selbst über. Schraubungen dieser Art gibt es ∞^4, und wir schließen:

Ein Parallelkomplex läßt ∞^4 *Bewegungen in sich zu.*

In der Euklidischen Geometrie gibt es auch einen linearen Komplex mit ∞^4 Bewegungen in sich. Er entspricht in seinen Eigenschaften dem Parallelkomplex der elliptischen Geometrie, ist aber ausgeartet: Alle seine Strahlen schneiden eine und dieselbe unendlich ferne Gerade.

§ 3. Die lineare Kongruenz oder das Strahlennetz.

a) Das allgemeine Strahlennetz.

39. Die Hauptstrahlen. Eine lineare Kongruenz oder, wie wir mit Sturm[1]) sagen wollen, ein Strahlennetz N und sein absolutpolares N_1 haben, von später zu besprechenden besonderen Fällen abgesehen, zwei Geraden gemein. Diese sind zueinander absolutpolar und, weil ein elliptischer Polarraum kein konjugiert imaginäres Paar polarer Geraden besitzt (vgl. Nr. 1), stets reell.

Ein Strahlennetz besitzt zwei stets reelle absolutpolare Strahlen h, h_1, die wir Hauptgeraden des Netzes nennen. Sie sind im Falle reeller Leitgeraden die gemeinsamen Lote von diesen.

Das Strahlennetz heißt hyperbolisch oder elliptisch, je nachdem es reelle Leitgeraden besitzt oder nicht. Es gilt der Satz:

Im elliptischen Strahlennetz haben alle Geraden gegen die Hauptgeraden gleiche Windung, so daß man von einem rechts- und einem linksgewundenen elliptischen Strahlennetz reden kann.[2])

Denn: Zu der windschiefen Involution, die von einem elliptischen Strahlennetz getragen wird, gehören an jedem Netzstrahl eine elliptische Punkt- und eine elliptische Ebeneninvolution. Greife ich die beiden Ebeneninvolutionen an den absolutpolaren Hauptgeraden h, h_1 heraus, und suche den Ort der Geraden, welche von den beiden elliptischen Ebeneninvolutionen in derselben Punktinvolution geschnitten werden, so ist das dieselbe Frage, wie wir sie zur Ableitung der Parallelennetze in Nr. 9 behandelten. Der Ort zerfällt wie dort in zwei Strahlennetze, von denen alle Strahlen des einen gegen h und h_1 rechtsgewunden sind, alle Strahlen des andern aber linksgewunden. Eines von beiden muß das Netz sein, von dem wir ausgingen.

Dagegen überzeugt man sich unschwer von dem Satze: *Im hyperbolischen Strahlennetz kommen beide Windungen gegen die Hauptstrahlen vor.*

40. Das Büschel von linearen Komplexen. Jedes Netz ist Grundgebilde eines Büschels von linearen Komplexen. Ein in einem linearen Komplex enthaltenes Paar absolut polarer Geraden muß demjenigen Netz des linearen Komplexes angehören, das durch die absolute Polarität in sich

1) Sturm, a. a. O. I. p. 110.

2) Vgl. Zindler, Liniengeometrie mit Anwendungen, Sammlung Schubert XXXIV. p. 174, und den nur für die Euklidische Geometrie brauchbaren Beweis.

selbst übergeht, d. h. es stützt sich auf seine Achsen. Die Achsen der linearen Komplexe eines Büschels stützen sich daher umgekehrt auf die Hauptgeraden des Grundnetzes.

Die Hauptgeraden h, h_1 legen innerhalb des Netzes N ein ∞^1-faches System von Regelscharen fest, denen sie selbst angehören. Die Trägerflächen bilden ein Büschel.

Die Regelscharen enthalten ein Paar absolutpolarer Geraden h, h_1, darum sind die Flächen nach Nr. 30 gleichseitige Paraboloide, und auch jede der Leitscharen enthält ein Paar absolut polarer Geraden. Wähle ich ein solches Paar zu Achsen eines linearen Komplexes, den ich überdies durch einen beliebigen Strahl des Netzes festlege, so enthält er von dem Netz diesen Strahl und die auf die Achsen gestützte Regelschar des gleichseitigen Paraboloids, also das ganze Netz, d. h. er gehört zu dem Büschel. Umgekehrt muß auch das Achsenpaar jedes Komplexes des Büschels so erhalten werden, weil das gegebene Netz mit demjenigen, welches sich auf die Achsen stützt, immer eine Regelschar, und zwar die eines gleichseitigen Paraboloids, gemein haben muß. Danach kann ich den Ort der Achsen der Komplexe des Büschels so erzeugen: Das Büschel von Flächen zweiter Ordnung, die durch h, h_1 gehen und deren eine Schar dem Netz angehört, geht durch die absolute Polarität wieder in ein Büschel durch h, h_1 über. Durch die absolute Polarität wird eine Projektivität der beiden Büschel hervorgerufen. Zwei entsprechende Flächen schneiden sich außer in h, h_1 noch in einem Paar absolutpolarer Geraden, die sich auf h, h_1 stützen. Das Erzeugnis ist der Ort der Achsen.

Der Ort der Achsen eines Büschels linearer Komplexe ist eine Regelfläche vierter Ordnung mit h, h_1 als doppelten Leitgeraden. Sie ist die projektive Verallgemeinerung des Plückerschen Zylindroids; nennen wir sie *Achsenfläche.* Wegen der doppelten Leitgeraden hat sie das Geschlecht Eins. [1])

41. Das Symmetrietetraeder. Mit dem Netz N ist eine windschiefe Involution verbunden (Nr. 8). Die zu ihr gehörigen Involutionen entsprechender Punkte auf h und h_1 haben mit der absoluten Involution je ein stets reelles Paar S, T; S_1, T_1 gemein, stets reell, weil die absolute Involution immer elliptisch ist. S, T, S_1, T_1 sind Ecken eines absoluten Po-

1) Sturm, a. a. O. Bd. III. p. 106 ff. gibt die allgemeine synthetische Theorie dieser Regelflächen. Rohn, Die verschiedenen Arten der Regelflächen vierter Ordnung, Math. Ann., Bd. 28, p. 284. Die Achsenfläche ordnet sich unter § 2, p. 292, N. 12. — In der dualprojektiven Geometrie tritt die Achsenfläche als Fundamentalfläche auf: Coolidge a. a. O. § 5. Dort heißt sie „chain“.

lartetraeders. Die Gegenkantenpaare SS_1, TT_1 und ST_1, TS_1 gehen durch die windschiefe Involution ineinander über und sind absolutpolar. Auf jedes Gegenkantenpaar stützt sich daher eine Regelschar des Netzes, welche einem gleichseitigen Paraboloid angehört, es liegt daher auf der Achsenfläche. *Die Achsenfläche enthält das absolute Polartetraeder* STS_1T_1; nennen wir es *Haupttetraeder*.

Ein linearer Komplex geht durch jede Drehung um seine Achse in sich selbst über, desgleichen auch durch jede Umwendung um einen die Achsen senkrecht schneidenden Nullstrahl.

h und h_1 sind achsensenkrechte Nullstrahlen für jeden linearen Komplex des Büschels. Nehme ich mit irgend zwei von ihnen eine Umwendung um h oder h_1 vor, so gehen sie in sich selbst über, also bleibt auch das beiden gemeinsame Netz in Ruhe. *h und h_1 sind Symmetrieachsen des Netzes.*

Für den Komplex, der SS_1 und TT_1 zu Achsen hat, sind ST_1, TS_1 achsensenkrechte Strahlen. Wende ich diesen Komplex und denjenigen, der ST_1, TS_1 zu Achsen hat, um ST_1 und TS_1 um, so gehen sie beide in sich selbst über, also bleibt auch wieder das beiden gemeinsame Netz in Ruhe. *Auch die anderen Kanten des Haupttetraeders sind Symmetrieachsen des Netzes.* h, h_1 heißen *Hauptsymmetrieachsen*, die vier anderen *Nebensymmetrieachsen.*

Eine Symmetrie, die das Netz in sich selbst überführt, führt natürlich jeden linearen Komplex des Büschels wieder in einen Komplex des Büschels über, also auch die Achsenfläche in sich. *Das Haupttetraeder ist Symmetrietetraeder auch für die Achsenfläche.*

Die Nebensymmetrien rufen auf den Strahlen der Regelfläche dieselbe Involution hervor, weil sie auf den Leitgeraden h, h_1 dieselben Punktinvolutionen bestimmen mit den Doppelpunkten S, T; S_1, T_1.

42. Involutionen auf der Achsenfläche. *Auf der Achsenfläche liegen folgende vier Involutionen*: 1) Die Involution der Strahlen, die durch denselben Punkt von h gehen, in derselben Ebene von h_1 liegen. 2) Die Involution der Strahlen, die durch denselben Punkt von h_1 gehen, in derselben Ebene von h liegen. 3) Die Involution der Achsenpaare, d. i. der absolutpolaren Strahlen. 4) Die Involution der Nebensymmetrien.

Alle vier Involutionen stützen einander d. h. jede führt jede andere in sie selbst über. Dieser Satz bedarf eines Beweises nur für die Involutionen 1) und 2). Eine beliebige Ebene ϵ schneidet die Regelfläche, wenn sie durch eine Erzeugende geht, außerdem in einer ebenen Kurve dritter Ordnung C^3 vom Geschlecht 1, also ohne Doppelpunkt. Jede der Strahleninvolutionen schneidet die C^3 in einer Punktinvolution. Insbesondere ist die durch die Involution 1) eingeschnittene Involution identisch mit derjenigen, welche durch das Strahlenbüschel um den Schnittpunkt H_1 der h_1 mit ϵ hervorgerufen wird, während die Involution 2) dieselbe Involution einschneidet, wie das Strahlenbüschel um den Schnittpunkt H der h mit ϵ. Die vier Flächen des Haupttetraeders schneiden aber in ϵ ein vollständiges Vierseit ein, dessen Ecken auf der C^3 liegen. H und H_1 sind also ein Paar Steinerscher Punkte, sie sind Ecken von unendlich vielen solchen der C^3 eingeschriebenen vollständigen Vierseiten, womit die Behauptung erwiesen ist.

Jedes dieser Vierseite liefert ein ganz auf der Fläche verlaufendes windschiefes Viereck. *Die Verwandtschaft* $[2, 2]$ *zwischen den Punkten von* h *und* h_1 *ist eine Projektivität zwischen zwei Involutionen.*

Als schneidende Ebene wähle ich speziell eine Ebene ϵ durch die Nebensymmetrieachse SS_1. Zentrum der durch 1) und 2) eingeschnittenen Involution ist S_1 bzw. S. Durch Umwendung um SS_1 geht die Achsenfläche und ϵ, also auch die durch die Involution 4) in C^3 eingeschnittene Involution in sich selbst über. Diese ist daher die Involution, welche von dem Strahlenbüschel um O, dem Schnittpunkt von T, T_1 mit ϵ, in die C^3 eingeschnitten wird. O selbst ist Mittelpunkt der C^3 und muß als solcher ein Wendepunkt von ihr sein. Die drei von O kommenden und anderwärts berührenden Tangenten müssen dann in den Schnittpunkten der C^3 mit SS_1 berühren, also in S, S_1 und einem weiteren Punkte, den ich X nennen will.

Schließlich ist die von 3) in die C^3 eingeschnittene Involution die durch das Strahlenbüschel um X hervorgerufene. Wenn sie nämlich überhaupt von einem Strahlenbüschel eingeschnitten wird, so kann das Zentrum kein anderer Punkt als X sein, denn SS_1 bilden ein Paar von ihr. Zum Beweise des ersten Teils aber kann ich den an sich wichtigen Satz verwenden: *Jedes Strahlennetz, das ein Paar der durch Nebensymmetrie hervorgerufenen Involution zu Leitgeraden hat, hat dieselbe Regelfläche zur Achsenfläche.* Die neue Achsenfläche hat mit der alten nämlich außer den beiden Leitgeraden und ihren absoluten Polaren auch das Symmetrietetraeder, welches seine Rolle beibehält, gemein. Durch die doppelten Leitgeraden und 8 Erzeugende ist die Regelfläche vierter Ordnung aber eindeutig bestimmt.

Dann gibt es also immer einen linearen Komplex, in welchem irgend ein Paar der Involution 3) Achsen, irgend ein Paar der Involution 4) nullpolare Strahlen sind und folglich liegt jedes Paar der einen Involution mit jedem der anderen in einer Regelschar, welche sich auf h und h_1 stützt. Für die in C^3 eingeschnittenen Involutionen folgt daraus, daß jedes Paar der einen Involution mit jedem der andern und den Punkten S, S_1 auf einem Kegelschnitt liegt. Ein Kegelschnittbüschel, das S, S_1 und irgend ein Paar der Symmetrieinvolution zu Grundpunkten hat, schneidet also des weiteren in C^3 die Involution ein, die von der absoluten Involution auf der Achsenfläche herrührt. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte [1]) laufen alsdann durch einen Punkt der C^3, von dem ich schon gezeigt habe, daß er kein anderer als X sein kann.

Damit die vier zentralen Involutionen sich gegenseitig in sich selbst überführen, ist notwendig, daß die vier Zentren Tangenten an die C^3 haben, welche sich in einem Punkt der C^3 schneiden. [2]) Das ist hier auch der Fall; die Tangenten schneiden sich in dem Wendepunkt O.

43. Gestaltliche Untersuchung der Achsenfläche. Eine ebene C^3 ist entweder einzügig — sie besteht aus einem unpaaren Zuge, der mit jeder Geraden ein oder drei reelle Punkte gemein hat, — oder sie ist zweizügig, — sie besteht aus einem unpaaren und einem paaren Zuge; der letzte hat mit jeder Geraden zwei oder keinen reellen Punkt gemein. [3]) Von einem Punkte des unpaaren Zuges gehen an ihn selbst stets zwei reelle Tangenten, an den paaren Zug, wenn er vorhanden ist, ebenfalls zwei reelle. Dagegen gehen von einem Punkte des paaren Zuges gar keine anderwärts berührenden reellen Tangenten aus. In unserem Falle gehen von dem Wendepunkt O drei reelle Tangenten OX, OS, OS_1 außer der Wendetangente selbst. Er liegt also auf einem unpaaren Zuge, und es muß noch ein paarer Zug vorhanden sein. Auf den unpaaren Zug fällt, weil die Wendetangente abzuziehen ist, nur noch eine. Die Frage ist, welcher der drei Punkte S, S_1, X auf dem unpaaren Zuge liegt. X kann es nicht sein, denn die von ihm kommenden reellen Tangenten würden dann auf vier Erzeugende der Achsenfläche schließen lassen, welche zu sich selbst absolutpolar sind. Nehmen wir darum an, daß S_1 auf dem unpaaren Zuge liegt, S und X auf dem paaren.

Von S_1 gehen vier reelle Tangenten an die C^3. Die von ihren Berührungspunkten auslaufenden Erzeugenden der Fläche sind Doppelstrahlen der Involution 1). Es gibt also auf h vier Punkte U, V, U', V', für welche die von einem Punkte ausgehenden Erzeugenden in eine Kuspidalerzeugende zusammenfallen. S dagegen liegt auf dem paaren Zuge, von ihm

1) H. Schröter, Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung. Leipzig, 1888, p. 60.

2) H. Schröter, a. a. O., § 31.

3) H. Schröter, a. a. O., p. 136.

gehen keine reellen Tangenten aus, die Involution 2) hat also keine reellen Doppelelemente.

Mit dieser Erkenntnis ist die Gestalt der Achsenfläche zu übersehen: Die Verzweigungspunkte U, V, U', V' auf h bilden nämlich den Übergang zwischen solchen Punkten, von denen zwei getrennte reelle Erzeugende ausgehen, und solchen, von denen imaginäre Erzeugende ausgehen. Dagegen sendet jeder Punkt der h_1 mangels reeller Verzweigungselemente zwei reelle getrennte Erzeugende aus. *Die Fläche besteht aus zwei Zügen, von denen jeder die h_1, wenn ich so sagen darf, als einfache Leitgerade hat, während jeder von h nur eine Strecke und diese als doppelte Leitgerade benützt.*

Von den beiden Zügen der Fläche schneidet der eine in unsere Ebene ϵ den paaren, der andere den unpaaren Zug der C^3 ein. Die Punktinvolutionen mit den Zentren O und S_1, die auf dem unpaaren Zuge liegen, führen jeden Zug in sich, diejenigen mit den Zentren S und X die beiden Züge ineinander über. Es folgt: die Involution der Strahlen, welche sich auf h schneiden, und die durch Nebensymmetrie hervorgerufene führen jeden der beiden Flächenzüge in sich, die Involution der Strahlen, die sich auf h_1 schneiden, und die der absolutpolaren Strahlen führen die beiden Züge ineinander über.

Die vier Doppelelemente der Involution 1), die Kuspidalgeraden, müssen, weil alle vier Involutionen einander in sich selbst überführen, durch die drei anderen Involutionen untereinander vertauscht werden. Sie ordnen sich daher in zwei Paare von Geraden, die sich auf h_1 schneiden: UW_1, $V'W_1$ und $U'W_1'$, VW_1', in zwei Paare absolutpolarer Geraden: UW_1, $U'W_1'$ und VW_1', $V'W_1$, endlich in zwei Paare in Nebensymmetrie entsprechender Geraden: UW_1, VW_1' und $U'W_1'$, $V'W_1$.

44. Eine metrische Relation. Zur Festlegung der Punkte auf h und h_1 will ich ihre Abstände von S und S_1 benutzen, die Strecken nicht größer als $\frac{\pi}{2}$ werden lassen, dafür aber positive Richtungen einführen, die in der vereinbarten Beziehung stehen.

Die Koordinaten der Punkte bezeichne ich durch die kleinen zugehörigen Buchstaben und habe dann:

$$u = -v, \quad u' = -v', \quad u - \frac{\pi}{2} = u', \quad v + \frac{\pi}{2} = v', \quad w_1 = -w_1' = \frac{\pi}{4}.$$

Das Achsoid ist Erzeugnis einer Projektivität zwischen zwei Involutionen auf h und h_1. Von der Involution auf h_1 kenne ich die Doppelelemente

w_1, w_1'. Bezeichne ich die laufende Koordinate mit r_1, so kann ich die Gleichung der Involution schreiben:

$$(\operatorname{tg} r_1 - 1)^2 + \lambda(\operatorname{tg} r_1 + 1)^2 = 0.$$

Von der Involution auf h kenne ich zwei Paare: U, V' und V, U', ihre Gleichung in der laufenden Koordinate r ist:

$$(\operatorname{tg} r - \operatorname{tg} u)(\operatorname{tg} r - \operatorname{tg} v') + \mu(\operatorname{tg} r - \operatorname{tg} v)(\operatorname{tg} r - \operatorname{tg} u') = 0,$$
$$(\operatorname{tg} r - \operatorname{tg} u)(\operatorname{tg} r - \operatorname{ctg} u) + \mu(\operatorname{tg} r + \operatorname{tg} u)(\operatorname{tg} r + \operatorname{ctg} u) = 0.$$

Die Projektivität zwischen den beiden Involutionen wird durch eine bilineare Relation in λ und μ ausgedrückt. Beachtet man, daß entsprechende Paare der Involutionen sind: U, V' und W_1; V, U' und W_1'; S, T und S_1, T_1, so erkennt man als diese bilineare Relation leicht die Gleichung $\lambda = \mu$. Mit ihrer Hilfe ergibt eine einfache trigonometrische Rechnung die Beziehung:

$$\sin 2u = \frac{\sin 2r}{\sin 2r_1}.$$

r legt einen Punkt auf h fest, diese Gleichung bestimmt durch Auflösung nach r_1 die beiden Punkte auf h_1, die von den durch den ersten gehenden Erzeugenden eingeschnitten werden.

Sind die Leitgeraden a, b des Strahlennetzes reell, so liegen sie auf der Achsenfläche. Die zu ihnen gehörigen Werte $2r$ und $2r_1$ sind die beiden Abstände AB und A_1B_1. Aus der Gleichung

$$\sin 2u = \frac{\sin AB}{\sin A_1B_1}$$

folgt dann, daß AB kleiner als A_1B_1 ist, weil sonst u nicht reell sein könnte. Wir schließen: *Die Verzweigungspunkte der Achsenfläche liegen auf dem kleinsten gemeinsamen Lote der Leitgeraden.*

Der weiteren Untersuchung der Achsenfläche und der Systeme koaxialer Netze steht in Analogie zu der bekannten Euklidischen Behandlung keine Schwierigkeit im Wege.

45. Mittelpunkts- und Mittelebenenfläche (Fokaltheorie)**.** [1]**)** Mit einem Strahlennetz ist eine windschiefe Kollineation verbunden. Auf

1) Jolles, Die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen. Math. Ann. 63, p. 337.

jedem Netzstrahl hat die zu der windschiefen Involution gehörige Punktinvolution mit der Involution absolut konjugierter Punkte ein stets reelles Paar gemein, stets reell, weil die zweite Involution immer elliptisch ist. Ich nenne die Punkte dieses Paares *Mittelpunkte* des Netzstrahles, denn im Falle reeller Leitgeraden halbieren sie die von den Leitgeraden auf dem Netzstrahl begrenzten Strecken. Um den Ort dieser Mittelpunkte im Raume zu ermitteln, lasse ich einen Punkt X auf einer Geraden x laufen. Sein in der windschiefen Involution entsprechender Punkt X' läuft auf einer Geraden x'. Auf x entsteht eine Projektivität, wenn ich einem Punkte X immer denjenigen zuordne, welcher zu seinem entsprechenden X' auf x' absolut konjugiert, also von ihm um $\frac{\pi}{2}$ entfernt ist. Die beiden Doppelelemente dieser Projektivität lehren, daß es auf einer beliebigen Geraden zwei Punkte gibt, deren in der windschiefen Kollineation entsprechende zu ihnen bzgl. absolut konjugiert sind. Der Ort der Mittelpunkte ist also eine Fläche zweiter Ordnung Φ^2. Die Nebensymmetrieachsen sind Paare absolutpolarer Geraden, die sich in der windschiefen Involution entsprechen; sie müssen also auf Φ^2 liegen. Es folgt: *Der Ort der Mittelpunkte ist ein gleichseitiges Paraboloid, das die Nebensymmetrieachsen trägt, und folglich die Hauptsymmetrieachsen zu Achsen hat.*

Dual gibt es in dem Ebenenbüschel um jeden Netzstrahl zwei auf einander senkrechte Ebenen, die in der windschiefen Involution entsprechend sind. Ich will sie *Mittelebenen* des Netzes nennen und erhalte durch eine der obigen duale Überlegung: *Der Ort der Mittelebenen ist ein gleichseitiges Paraboloid P^2, das die Nebensymmetrieachsen trägt.*

Errichte ich in einem Punkte X von Φ^2 die auf dem durchgehenden Netzstrahl senkrecht stehende Ebene ξ, so ist der Punkt X', der dem X in der windschiefen Involution entspricht, der absolute Pol von ξ. Die der ξ entsprechende Ebene ξ' geht durch X' und ist folglich auf ξ senkrecht. ξ gehört also der P^2 an. Es folgt: *P^2 ist zugleich der Ort der Ebenen, welche auf einem Netzstrahl in einem Mittelpunkt senkrecht stehen.* Und dual: Φ^2 ist zugleich der Ort der Punkte, welche mit einem Netzstrahl zusammen in einer Mittelebene liegen und zu dessen sämtlichen Punkten absolut konjugiert sind, d. h. von ihm den Abstand $\frac{\pi}{2}$ haben.

Zugleich folgt: Φ^2 *und P^2 gehen durch die absolute Polarität in einander über.*

Φ^2 und P^2 vertauschen ihre Rollen für das absolutpolare Strahlennetz.

46. Fokalinvolutionen und Fokalachsen. Φ^2 sowohl wie P^2 werden durch die windschiefe Involution scharweis in sich selbst übergeführt, weil einer Punktreihe von Mittelpunkten, einem Ebenenbüschel von Mittelebenen immer eine Punktreihe von Mittelpunkten, ein Ebenenbüschel von Mittelebenen entspricht. Die windschiefe Involution ruft also in jeder Schar von P^2 und Φ^2 eine Involution, *Fokalinvolution*, hervor. Die Ebenenbüschel um die Strahlen eines Paares von P^2 sind durch die windschiefe Involution in der Weise in Projektivität gesetzt, daß entsprechende Ebenen auf einander senkrecht stehen; sie erzeugen eine dem Netz angehörige Regelschar einer orthogonalen Fläche zweiter Ordnung. [1]) Die Punktreihen auf den Strahlen eines Paares von Φ^2 sind durch die windschiefe Involution so projektiv, daß entsprechende Punkte den Abstand $\frac{\pi}{2}$ haben; die erzeugte Regelschar liegt auf einer Fläche, die der orthogonalen dual gegenübersteht.

Wie in der Euklidischen Geometrie [2]) läßt sich zeigen, daß im hyperbolischen Netz alle Fokalinvolutionen elliptisch sind, während im elliptischen Netz auf Φ^2 und P^2 je eine hyperbolisch ist. Die Doppelelemente sind Netzstrahlen; sie heißen *Fokalachsen.* Für diejenigen auf P^2 sind die zur windschiefen Involution gehörigen Ebenenbüschel-Involutionen mit den absoluten Involutionen identisch, also entsprechende Ebenen stehen auf einander senkrecht; für diejenigen auf Φ^2 gilt dasselbe von den Punktinvolutionen, je zwei entsprechende Punkte haben den Abstand $\frac{\pi}{2}$.

Sind r, r_1 die Fokalachsen auf P^2, p, p_1 diejenigen auf Φ^2, so ist r rechtsparallel zu p, linksparallel zu p_1, r_1 rechtsparallel zu p_1, linksparallel zu p.

Die Punktinvolutionen auf p und p_1 sind perspektiv zu den Ebeneninvolutionen um r und r_1, weil sie zu derselben windschiefen Involution gehören. Die absoluten Ebeneninvolutionen um r und r_1 schneiden also in r_1 und r die absolute Punktinvolution ein. Das ist aber nach Nr. 9 gerade die Bedingung für den Parallelismus. Da nun in einem beliebigen Netze zu jeder Geraden nicht mehr als eine Parallele bestimmter Windung vorhanden ist — der Fall der Existenz von mehr Parallelen wird in Nr. 49 f. behandelt — so sind die p und r wie im Satze angegeben kreuzweis rechts- und linksparallel.

47. Parallelverwandtschaft, die Kernscharen. Jede Gerade eines beliebigen Netzes bestimmt ein rechtes und ein linkes Parallelennetz. Jedes

1) H. Schröter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung etc. § 25.

2) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 1857, Heft 1, p. 64.

von ihnen hat mit dem gegebenen noch eine reelle Gerade gemein.

Das beliebige Netz besteht daher aus Paaren rechts- und Paaren linksparalleler Geraden.

Durchläuft ein Strahl eine Regelschar des Netzes, so erfüllen die zugehörigen rechtsparallelen Netze einen quadratischen Komplex, denn durch jeden Punkt geht ein Kegel zweiter Ordnung von rechtsparallelen Strahlen zu den Strahlen der Regelschar (Nr. 24). Der quadratische Komplex hat mit dem gegebenen Netz eine Regelfläche vierter Ordnung gemein. Die ursprüngliche Regelschar ist ein Bestandteil von ihr, als zweiter Bestandteil bleibt wieder eine Regelschar. Durchläuft ein Netzstrahl eine Regelschar, so tut sein rechts-, linksparalleler das gleiche. *Die Verwandtschaften rechts- und linksparalleler Geraden innerhalb des Netzes sind also linear.*

Zwei Regelscharen des Netzes, deren Strahlen zu einander rechtsparallel sind, haben zwei Strahlen gemein. Diese müssen durch die Verwandtschaft rechtsparalleler Geraden entweder in sich selbst oder in einander übergehen. Die zweite Möglichkeit fällt weg, weil sie dann zu einander rechtsparallel wären, die beiden Regelscharen also zusammenfielen, denn ein Paar rechtsparalleler Geraden einer Regelschar verlangt nach Nr. 29 bereits eine Involution solcher Geraden. Das tritt aber bei einer beliebigen Schar des Netzes offenbar nicht ein. Es liegen in jeder Regelschar des Netzes zwei Geraden, die mit ihren in der Verwandtschaft rechtsparalleler Geraden zugeordneten Strahlen zusammenfallen, also keine rechte Parallele mehr im Netz besitzen. Der Ort dieser Geraden ist eine Regelschar, ich will sie als *rechte Kernschar* bezeichnen, die entsprechende Fläche für die Verwandtschaft linksparalleler Geraden als *linke Kernfläche.*

Jede Regelschar des Netzes durch zwei rechtsparallele Geraden trägt eine Involution solcher Strahlen; deren Doppelelemente sind die gemeinsamen Strahlen der Regelschar mit der Kernschar. Jedes Paar rechtsparalleler Strahlen des Netzes liegt also harmonisch zu je zwei Strahlen der rechten Kernschar, die mit ihnen auf einer Regelschar gelegen sind, und ist daher ein Paar polarer Geraden in bezug auf die Trägerfläche der rechten Kernschar.

Es gibt im Strahlennetz eine Regelschar von Strahlen, welche keine rechten, und eine Regelschar von Strahlen, welche keine linken Parallelen im Netz besitzen; wir nennen sie rechte und linke Kernschar des Netzes. Die Verwandtschaften rechter und linker Parallelen werden hervorgerufen durch den Polarraum der Trägerflächen der rechten und linken Kernschar.

Bewegung führt ein Paar paralleler Geraden immer in ein anderes gleicher Windung über. Die Umwendungen um die Gegenkantenpaare des Haupttetraeders, welche das Netz in sich überführen, müssen darum auch die Parallelverwandtschaften in sich überführen. Daraus folgt: *Die Trägerflächen der beiden Kernscharen haben das Symmetrietetraeder des Netzes selbst zum Haupttetraeder.*

48. Realität der Kernscharen. Ist das Netz hyperbolisch mit den reellen Leitgeraden a, b, so finde ich die Rechtsparallele zu einem Netzstrahl g mit den Stützpunkten A, B folgender Weise: Ich lege durch den Punkt A die Linksparallele b' zu b. Die Ebene ab' schneidet b in B'. Die Parallele rechter Windung zu g durch B' muß b' schneiden, weil sie das Parallelogramm $b'gbg'$ vervollständigt, sie schneidet also auch a in A'.

Die Konstruktion lehrt zugleich, daß durch die Verwandtschaft rechtsparalleler Strahlen das Netzstrahlenbüschel mit Scheitel A in dasjenige mit Scheitel B' übergeht. Der gemeinsame Netzstrahl AB' entspricht sich dabei selbst, ist also ein Strahl der rechten Kernschar. Man sieht hier auch direkt, daß zwei rechtsparallele Strahlen bezüglich der Kernfläche polar sind. Die Konstruktion lehrt ferner: *Im hyperbolischen Strahlennetz sind beide Kernscharen reell.*

Jede Regelschar des Netzes, welche die Hauptgeraden h, h_1 enthält, ist Schar eines gleichseitigen Paraboloids, trägt also eine Involution rechter und eine linker Parallelen. Alle diese Regelscharen erfüllen das ganze Netz. Die Doppelelemente der Involutionen gehören beziehungsweise der rechten und linken Kernschar an. Alle Strahlen einer solchen Regelschar sind zu den Hauptstrahlen gleichgewunden (Nr. 31). Im hyperbolischen Netz kommen beide Windungen vor, im elliptischen nur eine (Nr. 39). In einer Regelschar eines gleichseitigen Paraboloids, deren Strahlen zu den Hauptstrahlen rechtsgewunden sind, hat nur die Involution rechtsparalleler Strahlen reelle Doppelelemente (Nr. 31). Da im rechtsgewundenen elliptischen Netz nur Regelscharen rechter Windung gegen die Hauptstrahlen vorkommen, so folgt: *Im rechtsgewundenen elliptischen Netz ist nur die rechte, im linksgewundenen nur die linke Kernschar reell.*

b) Besondere Strahlennetze.

49. Netze mit ∞^1 Parallelscharen. (Parallele Leitgeraden.) Bisher haben wir von dem Strahlennetz angenommen, daß es mit seinem absolutpolaren nur zwei Geraden gemein hat. Wir betrachten weiter den Fall, daß beide Strahlennetze eine Regelschar gemein haben. Diese muß dann durch die absolute Polarität in sich selbst übergehen, also eine Schar einer orthogonalen Cliffordschen Fläche sein. Das tritt bei reellen Leitgeraden dann und nur dann ein, wenn die beiden Leitgeraden des Netzes parallel sind; die Schar, die es mit dem absolutpolaren gemein hat, ist dann die Regelschar der gemeinsamen Lote. Um aber auch hier das elliptische Netz einzuschließen, ohne doch die imaginären Leitgeraden zu benutzen, beweise ich:

Enthält ein Netz eine rechtsgewundene Parallelregelschar, so setzt es sich aus ∞^1 rechten Parallelregelscharen zusammen. Ist nämlich g ein beliebiger Strahl des Netzes außerhalb der Regelschar, so bestimmt er mit einem Strahl der Schar zusammen einen Parallelkomplex, bestehend aus ∞^1 rechtsgewundenen Parallelennetzen, in welchem das ganze Netz enthalten ist. Die Leitgeraden des Netzes sind dann bezüglich dieses Parallelkomplexes nullpolar, also — wenn sie reell sind — nach Nr. 37 linksparallel. Da ferner das Netz mit jedem der ∞^1 rechten Parallelennetze, mit denen es zusammen in einem linearen Komplex liegt, eine rechtsgewundene Parallelschar gemein hat, so ist der Satz bewiesen.

Der Parallelkomplex geht durch die absolute Polarität in sich selbst über, das gegebene Netz also in eines desselben Komplexes; beide Netze haben eine Regelschar gemein, das muß eine orthogonale Cliffordsche Schar sein. Es folgt: *Unter den ∞^1 rechtsgewundenen Cliffordschen Scharen des Netzes ist eine orthogonale Schar enthalten; wir nennen sie Hauptschar $\mathfrak{H}$.*

Von einer Verwandtschaft rechtsparalleler Strahlen ist nicht mehr zu reden, denn zu jedem Netzstrahl gibt es gleich eine Regelschar von rechtsparallelen Strahlen — mit einer Ausnahme im elliptischen Netz. Die Trägerflächen der im Netz enthaltenen rechtsgewundenen Cliffordschen Scharen erfüllen ein Büschel, weil durch jeden Punkt des Raumes ein Netzstrahl geht, durch diesen aber eine Schar bestimmt ist. Die Grundkurve des Büschels ist ein windschiefes Vierseit. Die beiden Gegenseiten, die den Netzscharen gemein sind, müssen notwendig imaginär sein, weil gleichgewundene Parallelennetze keine reellen Geraden gemein haben. Die beiden anderen sind die Leitgeraden des Netzes, also reell, wenn das Netz hyperbolisch ist, imaginär im elliptischen Netz. Im ersten Fall haben die ausgearteten Flächen des Büschels gar keinen reellen Bestandteil, im zweiten aber sind die Diagonalen des Vierseits reell und sind die einzigen reellen Strahlen von zwei imaginären Strahlenbüschelpaaren, die ausgeartete Flächen des Büschels darstellen. Wir folgern: *Im elliptischen Strahlennetz mit ∞^1 rechtsgewundenen Parallelscharen gibt es zwei reelle Strahlen, welche keiner reellen*

Parallelschar angehören.

50. Symmetrie-, Fokaleigenschaften usw. Wie wir in Nr. 41 bei dem gewöhnlichen Netz die Strahlen h, h_1 als Hauptsymmetrieachsen nachwiesen, so sieht man hier: *Alle Strahlen der Hauptschar* $\mathfrak{H}$ *sind Symmetrieachsen des Netzes.* Aus denselben Gründen wie in Nr. 41 erschließt man folgende Nebensymmetrieachsen: In der auf die Hauptschar $\mathfrak{H}$ gestützten Schar liegen zwei Involutionen, erstens die Involution absolutpolarer Geraden, zweitens die durch die vom Netz getragene windschiefe Involution hervorgerufene. Beide haben ein Strahlenpaar gemein c, c_1. *c und c_1 sind ein Paar Nebensymmetrieachsen des Netzes.* Sind die Leitgeraden des Netzes reell, so sind c, c_1 zu ihnen linksparallel.

Weiter bestimmt jedes Paar absolut polarer Geraden von $\mathfrak{H}$ mit c, c_1 ein absolutes Polarvierseit, dessen Diagonalen wieder wie in Nr. 41 Nebensymmetrieachsen sind. Wir erhalten alle diese Nebensymmetrieachsen, indem wir allenthalben die Stützpunkte zweier absolutpolaren Hauptsymmetrieachsen h, h_1 auf den Nebensymmetrieachsen c, c_1 übers Kreuz verbinden. Aus dieser Konstruktion schließen wir: *Es gibt noch eine orthogonale Cliffordsche Schar von Nebensymmetrieachsen* $\mathfrak{N}$*; sie stützt sich auch auf c, c_1 und ist auch rechtsgewunden.*

Die Achsen jedes das Netz enthaltenden linearen Komplexes müssen — wofern er nicht ein Parallelkomplex ist — alle absolutpolaren Geradenpaare des Netzes schneiden. Daraus folgt: Der Ort der Achsen der linearen Komplexe ist die auf $\mathfrak{H}$ gestützte Regelschar. *Die Trägerfläche von* $\mathfrak{H}$ *ist Achsenfläche.* Sind die Leitgeraden des Netzes reell, so sind alle Achsen zu ihnen in derselben Windung parallel, wie das ja auch durch Nr. 33 gefordert wird.

Wir wissen aber, daß in den Komplexbüschel ein aus rechtsgewundenen Parallelennetzen gebildeter Parallelkomplex eingeht. Das rechtsgewundene Parallelennetz seiner Achsen bestimmt sich durch die Bemerkung: Wie in Nr. 41 muß jede Nebensymmetrieachse Achse eines linearen Komplexes sein. Aus ihr schließen wir nämlich: *Das Achsennetz des Parallelkomplexes ist das rechtsgewundene Parallelennetz, dem die Nebensymmetrieschar angehört.*

Die Schar $\mathfrak{N}$ geht durch die vom Netz getragene windschiefe Involution so in sich selbst über, daß jedes Paar absolutpolarer Geraden in sich vertauscht wird. Daraus folgt: *Mittelpunkts- und Mittelebenenfläche Φ^2 und P^2 sind in der Trägerfläche der Nebensymmetrieschar* $\mathfrak{N}$ *zusammengefallen.*

Da *die Fokalinvolutionen* durch die windschiefe Involution hervorgerufen werden, so sind die zu Φ^2 und P^2 gehörigen auch in jeder Schar identisch geworden.

Die Fokalinvolution in der Schar $\mathfrak{N}$ ist die absolute, sie ist immer elliptisch, kann also auch nie die Fokalachsen enthalten. Die im Falle des elliptischen Netzes auftretenden Fokalachsen müssen also der Leitschar von $\mathfrak{N}$ angehören. *Die Punkt- und Ebenen-Fokalachsen sind zusammengefallen* $p \equiv r_1$, $p_1 \equiv r$.

Die beiden Fokalachsen müssen parallel sein (vgl. Nr. 46). Die zur windschiefen Involution gehörige Ebeneninvolution um p ist die orthogonale. Gäbe es nun zu p im Netz eine ganze Regelschar von rechtsparallelen Geraden, so würde auf ihnen allen von der orthogonalen Involution um p die absolute Punktinvolution eingeschnitten werden, alle Strahlen wären Punktfokalachsen. Da das ausgeschlossen ist, schließen wir: *Die beiden Fokalachsen* p, p_1 *im elliptischen Netz mit* ∞^1 *rechten Parallelscharen sind die beiden Strahlen, welche keine rechte Parallele im Netz besitzen, sie sind linksparallel.*

Die *Verwandtschaft linksparalleler Geraden* im Netz bleibt erhalten. Die zugehörige *Kernfläche* hat alle Haupt- und Nebensymmetrieachsen selbst zu Achsen und muß darum Cliffordisch sein. Ihre Hauptachsen sind c, c_1; sie ist nur dann reell, wenn die Leitgeraden des Netzes es sind, denn anderenfalls sind alle Strahlen gegen die Hauptgeraden rechtsgewunden (vgl. Nr. 48). Sind die Leitgeraden reell, so entsteht sie durch deren Rotation um c, c_1.

Die ∞^1 linksgewundenen Parallelverschiebungen von c, c_1 und nur diese führen die Achsen aller Komplexe des Büschels, also auch die Komplexe selbst, und das allen gemeinsame Netz in sich über. Es gilt daher: *Das Netz mit* ∞^1 *rechtsgewundenen Cliffordschen Scharen läßt eine eingliedrige Gruppe von Bewegungen in sich zu, nämlich die linken Parallelverschiebungen längs der Symmetrieachsen* c, c_1.

Analoge Sätze gelten für das Netz mit ∞^1 linksgewundenen Cliffordschen Scharen.

51. Netz mit absolutpolaren Leitgeraden. Endlich kann das Strahlennetz mit seinem absolutpolaren identisch sein, dann hat es entweder absolutpolare und darum stets reelle Leitgeraden [1]), oder es ist ein Parallelennetz.

Bei *absolutpolaren Leitgeraden* a, a' gibt es ∞^1 rechts- und ∞^1 links-

1) Coolidge, a. a. O. p. 21 nennt es „normal net“.

gewundene Cliffordsche Scharen, sie sind sämtlich orthogonal.

Alle Strahlen des Netzes sind Hauptsymmetrieachsen. *Alle Strahlen der orthogonalen Cliffordschen Fläche mit a, a' als Achsen sind Nebensymmetrieachsen.*

Das Büschel der das Netz enthaltenden linearen Komplexe ist koaxial mit den festen Achsen a, a'. Je zwei Komplexe mit reziprokem Parameter sind absolutpolar zueinander. Die Doppelelemente der dadurch im Komplexbüschel hervorgerufenen Involution sind die beiden Parallelkomplexe mit den Parametern -1 und $+1$. Ihre Achsennetze sind das links- bzw. rechtsparallele Netz von a, a'.

Die orthogonale Cliffordsche Fläche der Nebensymmetrieachsen ist zugleich *Mittelpunkts- und Mittelebenenfläche*. Die Strahlen ihrer beiden Scharen sind die Achsen der im Netz enthaltenen orthogonalen Cliffordschen Scharen beider Windungen. Beide Fokalinvolutionen sind mit den absoluten identisch.

Das Netz gestattet eine zweigliedrige kontinuierliche Gruppe von Bewegungen, nämlich alle Schraubungen um die Leitgeraden a, a'.

52. Das Parallelennetz. Schließlich haben wir dieselbe Gruppe von Fragen für das *Parallelennetz* zu beantworten.

Das Parallelennetz besteht aus lauter Paaren absolutpolarer Geraden; darum gilt: *Alle Strahlen des Parallelennetzes sind Hauptsymmetrieachsen.*

Ein rechtes Parallelennetz ist nur in Parallelkomplexen mit dem Parameter -1 enthalten. Die Achsennetze dieser Komplexe, die nach Nr. 37 selbst rechte Parallelennetze sind, erfüllen denjenigen Parallelkomplex mit dem Parameter -1, der das gegebene Netz zum Achsennetz hat. Derselbe lineare Komplex, d. i. der Ort der Strahlen, welche die Strahlen des gegebenen Netzes rechtwinklig schneiden (Nr. 37), ist zugleich der Ort der *Nebensymmetrieachsen* des rechten Parallelennetzes.

Die vom Parallelennetz getragene windschiefe Involution führt den absoluten Polarraum so in sich selbst über, daß jedes Paar entsprechender Elemente absolut konjugiert ist. Die Involutionen von Punkten und Ebenen an allen Netzstrahlen sind die absoluten, eine Eigenschaft, die wir in Nr. 9 zur Ableitung der Parallelennetze benutzten. Darum gilt: *Alle Strahlen des Parallelennetzes sind Fokalstrahlen sowohl bezüglich ihrer Punktreihen wie ihrer Ebenenbüschel.*

Da durch die windschiefe Involution jeder Punkt in einen absolut konjugierten, jede Ebene in eine absolut konjugierte übergeht, so haben alle

Punkte und Ebenen des Raumes die Eigenschaften der Mittelpunkts- und Mittelebenenfläche.

Die Verwandtschaft der linksparallelen Strahlen im rechten Parallelennetz ist identisch mit der durch den absoluten Polarraum im Netz hervorgerufenen Verwandtschaft absolutpolarer Geraden.

53. Die Geometrie der Kugel im Strahlennetz. Alle Regelscharen eines rechten Parallelennetzes sind rechte Cliffordsche Scharen. Jeder Strahl des Netzes ist Hauptachse von ∞^1 im Netz enthaltenen Cliffordschen Scharen, unter diesen ist eine orthogonale, nämlich diejenige mit dem Radius $\frac{\pi}{4}$.

Das System der orthogonalen Cliffordschen Scharen des Netzes ist linear und von der zweiten Stufe.

Zwei beliebige Netzstrahlen legen nämlich eindeutig eine durch sie gehende orthogonale Schar fest: es ist die Leitschar der Schar ihrer gemeinsamen Lote. Es gilt aber eine Ausnahme; wenn die beiden Netzstrahlen absolut polar sind, so geht ein System erster Stufe von orthogonalen Scharen durch sie, weil in einer orthogonalen Schar zu jedem Strahl auch der absolut polare enthalten ist. Man erkennt das System sofort als ein Büschel.

Je zwei orthogonale Cliffordsche Scharen schneiden sich in einem Paar absolutpolarer Geraden und bestimmen ein Büschel, dem sie angehören. Der Ort der Hauptachsen der orthogonalen Scharen des Büschels ist der Ort der Netzgeraden, welche von den Grundstrahlen des Netzes den Abstand $\frac{\pi}{4}$ haben, also die orthogonale Cliffordsche Fläche, welche diese Grundstrahlen zu Hauptachsen hat. Umgekehrt bilden die orthogonalen Cliffordschen Scharen, deren Hauptachsen auf einer orthogonalen Schar laufen, ein Büschel, dessen Grundstrahlen die Achsen dieser Schar sind.

Die Strahlen und orthogonalen Cliffordschen Scharen eines Parallelennetzes stehen in dem Zusammenhange der Punkte und größten Kreise der Euklidischen Kugel. Wie dem Punkt der Kugel sein Gegenpunkt zugehört, so dem Strahl sein absolut polarer. Wie ein größter Kreis durch zwei Punkte bestimmt ist, so eine orthogonale Schar durch zwei Strahlen, außer wenn sie absolutpolar sind. Wie zwei größte Kreise sich in zwei Gegenpunkten schneiden, so schneiden sich zwei orthogonale Cliffordsche Scharen in zwei absolutpolaren Strahlen.

Ordne ich jedem Strahl und seinem absolut polaren die orthogonale Schar zu, die diese Strahlen zu Hauptachsen hat, so entsteht eine lineare, involutorische Korrelation, denn nach den oben abgeleiteten Eigenschaften gilt: Durchläuft der Strahl eine orthogonale Schar, so beschreibt seine zugeordnete orthogonale Schar ein Büschel, dessen Grundstrahlen die Achsen, also die zugeordneten Strahlen der ersten Schar sind. Eine involutorische Korrelation in einem zweistufigen Gebilde ist immer die Polarität in bezug auf ein Gebilde zweiten Grades erster Stufe. Diese Verwandtschaft entspricht genau der Zuordnung von größtem Kreis und zugehörigem Pol auf der Kugel.

Das Parallelennetz gestattet ∞^4 *Bewegungen in sich*, nämlich alle Schraubungen um jeden seiner Strahlen. Für die Geometrie des Strahlennetzes aber sind zwei Bewegungen als identisch zu betrachten, die durch eine Parallelverschiebung längs der Netzstrahlen auseinander hervorgehen. So geben die ∞^4 Bewegungen des Raumes, welche das Netz in sich selbst überführen, nur eine *dreigliedrige Gruppe von Bewegungen des Netzes in sich ab.* Jede Bewegung dieser Gruppe führt eine orthogonale Schar wieder in eine orthogonale Schar über, ihre Hauptachsen in die Hauptachsen der neuen Schar; sie führt also die Polarität, die durch die Zuordnung der Netzstrahlen und der orthogonalen Scharen um sie als Achsen gebildet wird, in sich selbst über. Die dreigliedrige Gruppe von Bewegungen des Netzes entspricht daher genau der Gruppe der Bewegungen der Kugel in sich. Wir schließen:

Im Parallelennetz herrscht die Geometrie der Euklidischen Kugel. [1])

1) Hieraus folgert man Studys Abbildung der Liniengeometrie des elliptischen Raumes auf die Punktepaare zweier Kugeln. Jahresb. d. D. Math.-Ver. Bd. 11. 1902. p. 320.